

INSTITUTO FEDERAL SUL-RIO-GRANDENSE

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

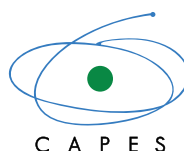
**Programa de Fomento ao Uso das
TECNOLOGIAS DE COMUNICAÇÃO E INFORMAÇÃO NOS CURSOS DE GRADUAÇÃO - TICS**

TICS

Cálculo Vetorial

Vasco Ricardo Aquino da Silva

Ministério da
Educação



SUMÁRIO

UNIDADE A - VETORES	5
Características e Operações	7
Vetores iguais	7
Vetores Opostos	7
Operações com vetores na forma geométrica	8
Adição de vetores	8
Subtração de vetores	9
Operações com vetores na forma analítica	9
Vetores no Plano	9
Vetores no espaço	10
Atividade	11
UNIDADE B - PRODUTO ENTRE VETORES	13
Produto escalar	15
Aplicações do produto escalar	15
Produto vetorial	16
Produto misto	17
Atividades	19
UNIDADE C - RETAS E PLANOS	21
Estudo da reta	23
Atividades	24
Resumo	24
UNIDADE D - FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS	25
Definições	27
Função de duas variáveis	27
Representações	27
Alguns gráficos de funções de duas variáveis	28
Características	28
Funções de várias variáveis	29
Limites de funções de duas variáveis	30
Continuidade	30
Atividades	31
Usando o programa winplot para traçado de gráficos	31
Exercícios	31
UNIDADE E - DERIVADAS PARCIAIS	33
Exercícios	35
UNIDADE I - FUNÇÕES VETORIAIS	37
Funções vetoriais: Introdução	39
UNIDADE J - INTEGRAIS DE LINHA	41
Exercícios	43
UNIDADE K - CAMPOS VETORIAIS	45
Exercícios	47



tics

A

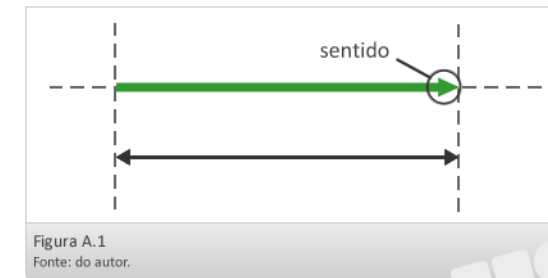
Vetores

Unidade A
Cálculo Vetorial

VETORES

Características e Operações

É um elemento matemático representado por um segmento de reta orientado. Possui **módulo** (que é o comprimento do segmento), **direção** e **sentido**.



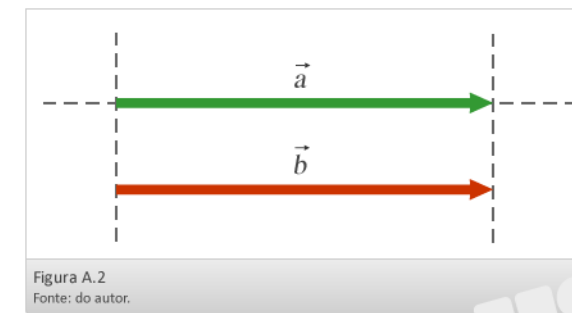
Indicamos um vetor definido por dois pontos da seguinte maneira:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

Vamos analisar algumas comparações entre vetores:

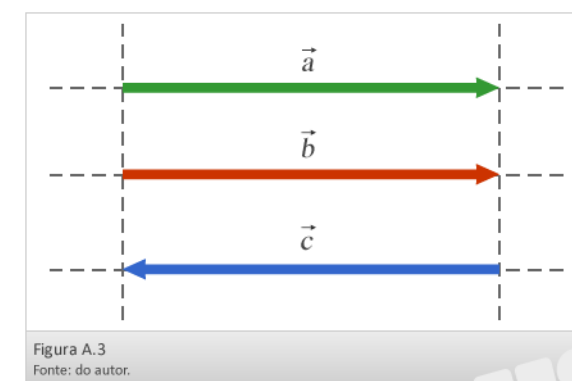
Vetores iguais

Mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido



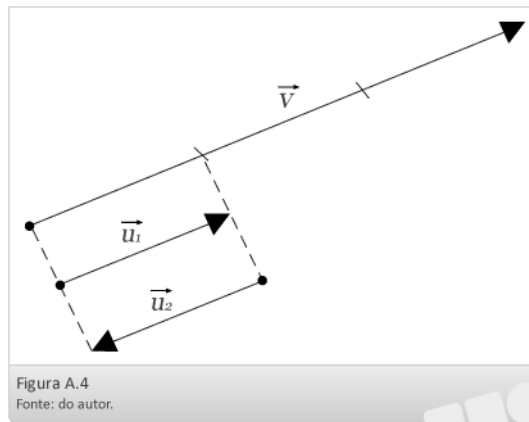
Vetores opostos

Têm o mesmo módulo, mesma direção, mas sentidos opostos.



Algumas definições são importantes dentro do estudo dos vetores, tanto para uma interpretação geométrica quanto para uma análise analítica.

1. Dois vetores são paralelos se os seus representantes tiverem a mesma **direção**.
2. Qualquer ponto do espaço é representante do vetor zero (ou vetor nulo).
3. Um vetor é unitário se o seu módulo é igual a 1.
4. O versor de um vetor não nulo, é um vetor unitário, de mesma direção e mesmo sentido do vetor dado.

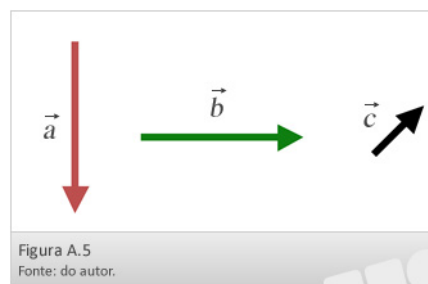


Operações com vetores na forma geométrica

Adição de vetores

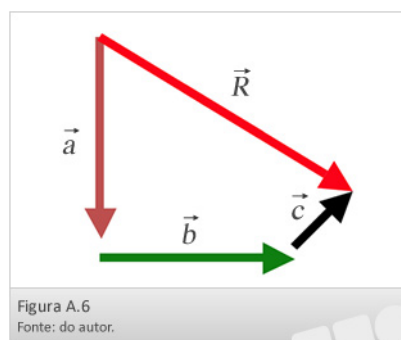
É utilizada na adição de qualquer quantidade de vetores.

Exemplo:



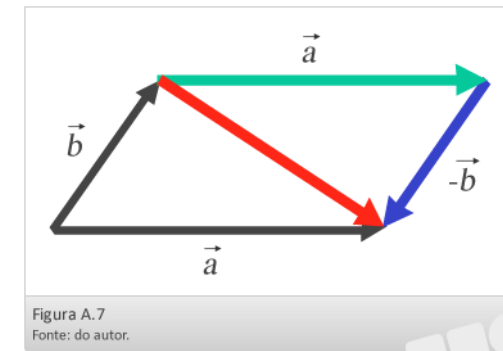
Para somar os vetores acima, devemos posicionar cada vetor junto ao outro, de forma que a extremidade de um vetor coloque-se junto à origem do outro.

E o vetor soma, ou também chamado vetor resultante ($\vec{R}$), será o **vetor que une a origem do primeiro com a extremidade do último**, formando assim um polígono.



Subtração de vetores

Realizar a subtração, $\vec{a} - \vec{b}$, é como somar a mais um vetor de mesma intensidade, mesma direção, porém, com sentido oposto ao do vetor $\vec{b}$ originalmente representado. Na realidade, estaremos fazendo a adição do vetor a com um vetor oposto ao vetor b ($\vec{a} + (-\vec{b})$).



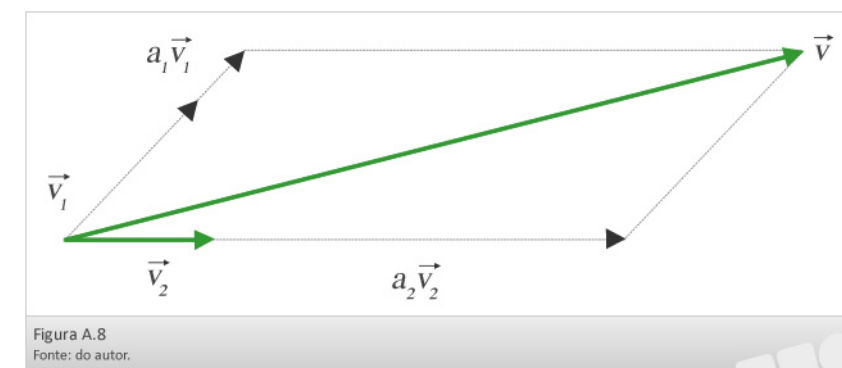
Operações com vetores na forma analítica

Vetores no Plano

Qualquer vetor não nulo pode ser expresso em função de dois vetores não paralelos $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

E neste caso dizemos que $\vec{v}$ é combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

Então, escrevemos: $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$



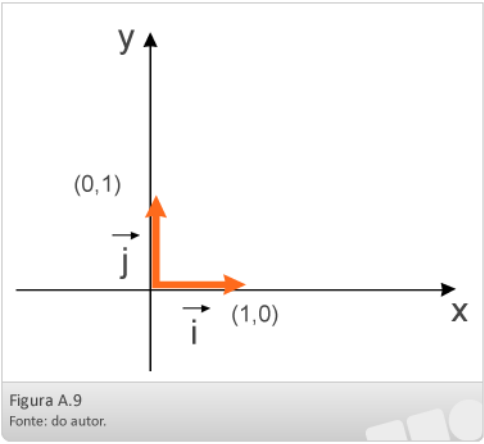
Também dizemos que conjunto desses vetores:

$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ forma uma base do $\mathbb{R}^2$.

As bases mais utilizadas são as ortonormais àquelas em que os vetores são ortogonais e unitários.

Os vetores nesse sistema são representados por $\vec{i}$ e $\vec{j}$, ambos com origem na origem dos eixos coordenados e extremidade em (1, 0) e (0, 1) respectivamente.

A base mais utilizada é chamada de **base canônica**:



Usando a base canônica determinamos a expressão analítica de um vetor:

Ou seja, tomando $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$

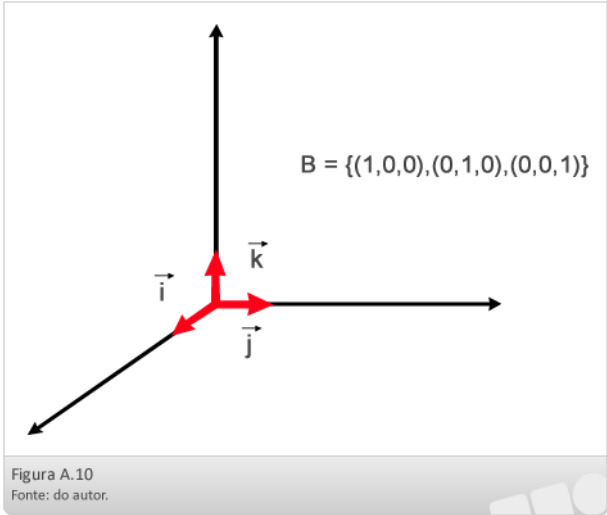
Escrevemos o vetor $\vec{v} = (x,y)$ portanto um vetor é um ponto do plano.

Exemplos:

Forma canônica	Forma analítica
$2\vec{i} + 3\vec{j}$	(2,3)
$2\vec{j}$	(0,2)
$-5\vec{i}$	(-5,0)
$-\vec{i} + \vec{j}$	(-1,1)

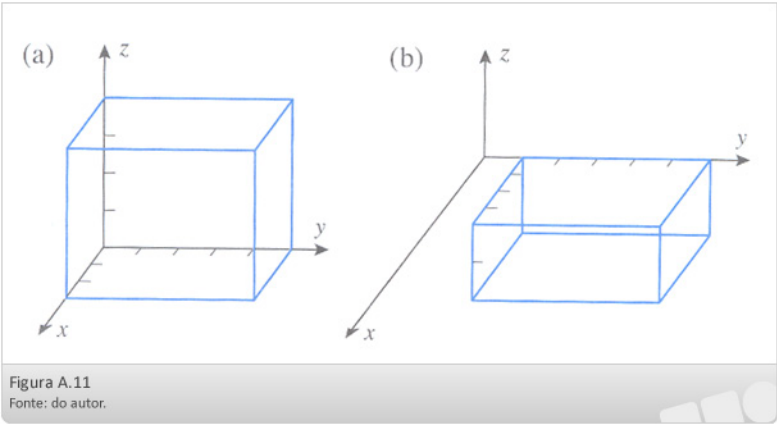
Vetores no espaço

Todas as propriedades estudadas para os vetores no plano continuam válidas no espaço, bastando para isso considerarmos a seguinte base canônica:



ATIVIDADE

1. Em cada parte determine as coordenadas dos 8 cantos da caixa:



2. Pesquise qual é a fórmula que calcula a distância entre dois pontos e aplique para as seguintes questões:

- a. (1,-2,0) e (-3,4,1)
- b. (5,3,-4) e (3,1,-4)
- c. (-1,-2,-3) e (1,2,3)
- d. (0,0,0) e (-5,2,-1)

5. Dados os pontos A(3, -4) e B(-1, 1) e o vetor $v=(-2,3)$, calcular:

- a. $(B - A) + 2v$
- b. $(A - B) - v$
- c. $B + 2(B - A)$
- d. $3v - 2(A - B)$



Tics

Produto entre vetores

Unidade B
Cálculo Vetorial

PRODUTO ENTRE VETORES

Produto escalar

Chama-se produto escalar de $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ número real $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Exemplo:

$$\vec{u} = (-2, 1, 5)$$

$$\vec{v} = (0, -4, 3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2)(0) + (1)(-4) + (5)(3) = 0 - 4 + 15 = 11$$

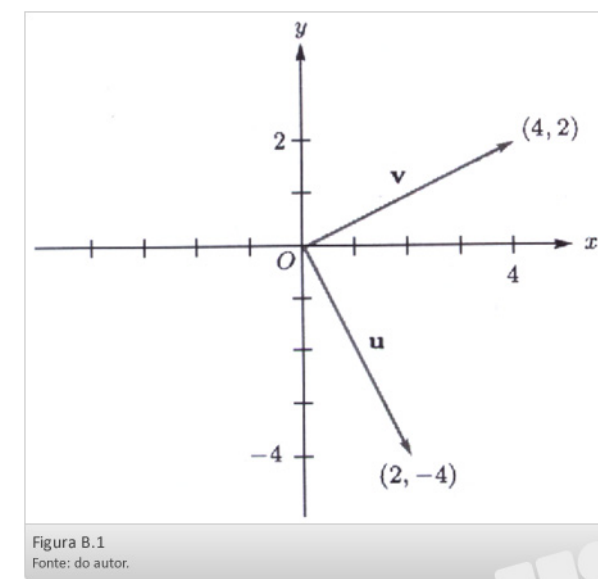
Aplicações do produto escalar

Uma aplicação importante do produto escalar é a **condição de ortogonalidade** entre vetores:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Exemplo:

Os vetores $\vec{u} = (2, -4)$ e $\vec{v} = (4, 2)$ são ortogonais, pois fazendo o produto escalar o resultado é zero.



Outra aplicação importante é o cálculo do ângulo entre dois vetores: A fórmula é dada por $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

Exemplo:

Calcular o ângulo entre os vetores:

$$u = (1, 1, 4) \text{ e } v = (-1, 2, 2)$$

$$\cos \theta = \frac{(1, 1, 4) \cdot (-1, 2, 2)}{\|(1, 1, 4)\| \|(-1, 2, 2)\|} = \frac{-1 + 2 + 8}{\sqrt{18} \sqrt{9}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

Produto vetorial

O produto vetorial de $\vec{u} \times \vec{v}$ é o vetor de módulo igual à área do paralelogramo definido pelos dois vetores e direção perpendicular ao plano do paralelogramo.

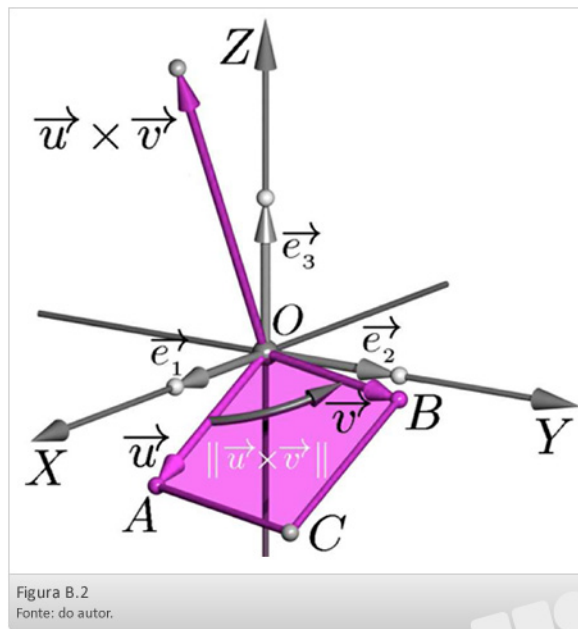


Figura B.2
Fonte: do autor.

Para facilitar o cálculo desse produto vetorial, utilizaremos a seguinte notação: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

Exemplo:

Dados $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$ determine o vetorial v :

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$-1 + 12j - 5k = (-1, 12, -5)$$

A interpretação geométrica do módulo do produto vetorial é numericamente igual à área do paralelogramo formado por esses vetores:

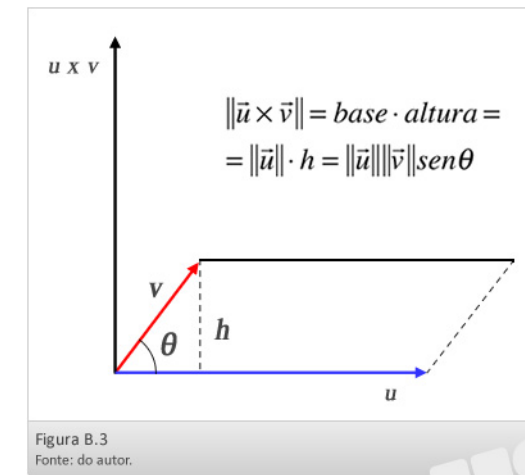


Figura B.3
Fonte: do autor.

Produto misto

Dados os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ definimos o produto misto entre u, v e w , denotado por $[u, v, w]$ ou por $u \cdot (v \times w)$, como o número real obtido a partir do determinante

$$[u, v, w] = u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

O resultado do produto misto é um NÚMERO REAL.

Exemplo:

Dados os vetores $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (0, -1, 2)$ e $\vec{w} = (2, 2, -1)$ calcule o produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

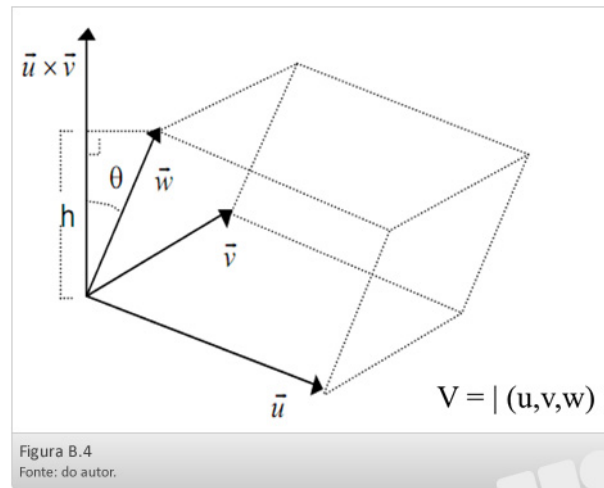
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1) = -2$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (+2 + 4 + 0) - (-6 + 8 + 0)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 4$$

A interpretação geométrica do módulo do produto misto é numericamente igual ao volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



Exemplo:

Calcule o volume do paralelepípedo formado pelos vetores:

$$\vec{u} = (1, 1, 5) \quad \vec{v} = (0, 3, 2) \quad \vec{w} = (2, 2, 1)$$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = |-27| = 27$$

UNIDADE

B

ATIVIDADE

Assistir ao vídeo seguindo o link abaixo

<http://www.youtube.com/watch?v=pVZuclu-icY&feature=related>

Resolver os seguintes exercícios.

- Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcule:
 - $2\vec{u} \cdot \vec{v}$
 - $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$
 - $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
- Determine o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$, tal que $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = -42$.
(pesquise essa notação usada).
- Determine o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo das ordenadas, $\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle = 8$ e $\langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle = -3$, sendo $\vec{v}_1 = (3, 1, -2)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$.
- Sabendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -1$, calcule $\langle (\vec{u} + \vec{v}), (\vec{v} - 4\vec{u}) \rangle$.
- Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 20cm. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Calcule o valor de m de modo que seja 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 1, m+1)$.
- Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = (2, 4, -1)$ e $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$ calcule:
 - $|\vec{u} \times \vec{u}|$
 - $(2\vec{v}) \times (3\vec{v})$
 - $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$
 - $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
 - $(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{w} \times \vec{u})$
- Dados os pontos A(2,1,-1), B(3,0,1) e C(2,-1,-3), determine o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}$.
- Dados os vetores $\vec{u} = (3, 1, 1)$, $\vec{v} = (-4, 1, 3)$ e $\vec{w} = (1, 2, 0)$ determine $\vec{x}$ de modo que $\vec{x} \perp \vec{w}$ e $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$.
- Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$, calcule:
 - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
 - $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$



tics



Retas e Planos

Unidade C
Cálculo Vetorial

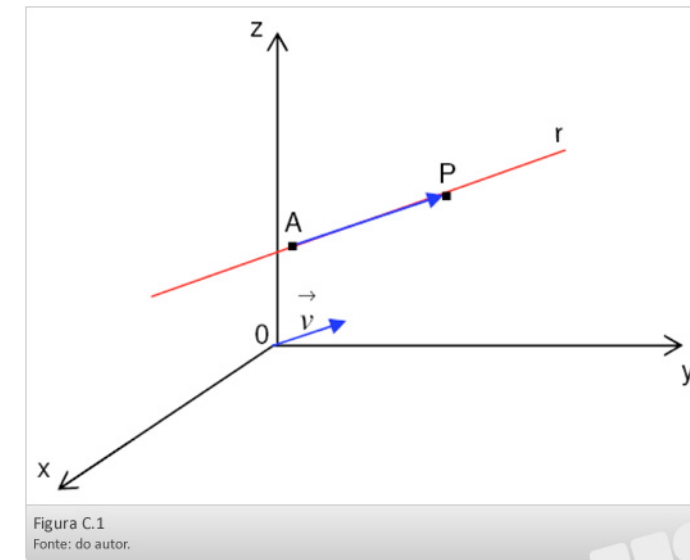


RETAS E PLANOS

Nesta unidade faremos um tratamento analítico da reta e do plano, utilizando os conceitos de vetores vistos anteriormente.

Estudo da reta

Consideremos a reta “r” que passa pelo ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem a direção do vetor **não nulo** $\vec{v} = (a, b, c)$



Sendo $P(x, y, z)$ um ponto qualquer (variável) de “r” temos $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$ que é a equação vetorial da reta.

As outras equações utilizadas são :

- A equação paramétrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

- A equação simétrica;

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

- A equação reduzida:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$



ATIVIDADES

Exercícios

1. Determine a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $A(3,0,-5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

Você deve encontrar como resposta: $(x,y,z) = 3 + 2t, 2t, -5 - t, t \in \mathbb{R}$

2. Determine as equações paramétricas da reta r , que passa pelo ponto $A(3,-1,2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-3, -2, 1)$

Você deve encontrar como resposta:
$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

3. Determine as equações simétricas da reta que passa pelo ponto $A(3,0,-5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

Você deve encontrar como resposta: $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{2}$

4. Estabeleça as equações reduzidas da reta r que passa pelos pontos $A(2,1,-3)$ e $B(4,0,-2)$.

Você deve encontrar como resposta: $y = \frac{-x+4}{2}$ e $z = \frac{x-8}{2}$

Resumo

Assista às apresentações “**Estudo da Reta**” e “**Estudo do Plano**”, em Power Point, e faça um resumo sobre ela.



Tics



Funções de várias variáveis

Unidade D
Cálculo Vetorial

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Todas aquelas regras válidas para as quantidades escalares são válidas para as quantidades vetoriais.

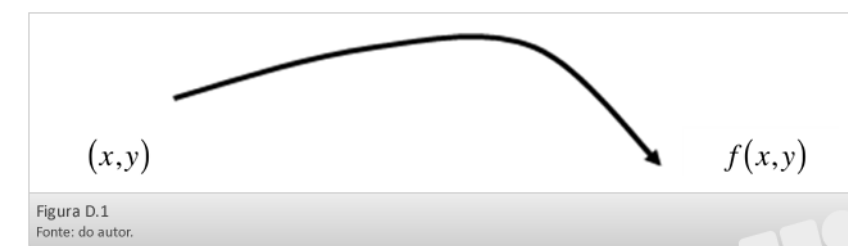
O conceito de derivada parcial pode ser aplicado geometricamente para encontrar a inclinação de uma superfície na direção de x e y .

Podemos aplicar as derivadas parciais como taxa de variação e essa interpretação envolve muitos fenômenos físicos.

Definições

Função de Duas Variáveis

Uma função real f de duas variáveis é uma relação que a cada par ordenado de números reais (x, y) associa um único número real $z=f(x, y)$.

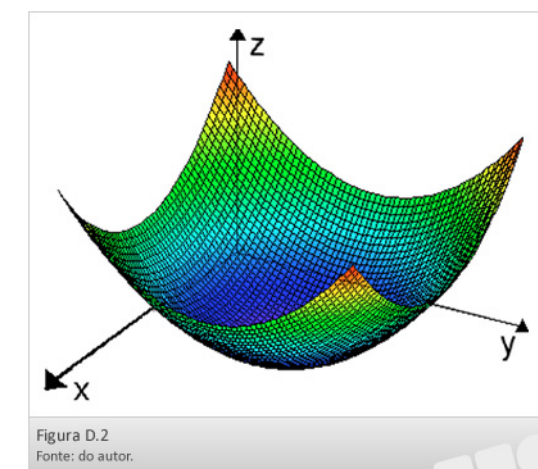


As funções de duas variáveis aparecem em muitas situações práticas, tais como:

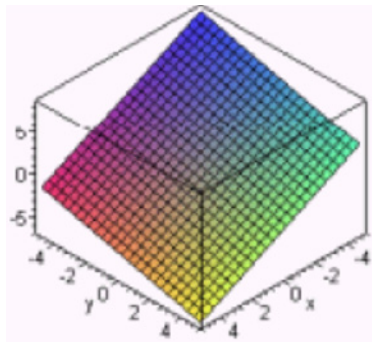
- Áreas de figuras que dependem da altura e da largura.
- Volumes que dependem da altura e do raio.

Representações

As funções de duas variáveis podem ser representadas graficamente por superfícies em sistema tridimensional de coordenadas.

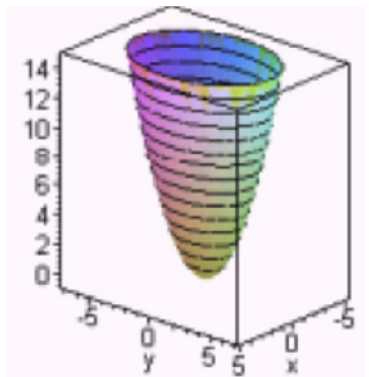


Alguns gráficos de funções de duas variáveis:



Equação: $z = ax + by + c$

Superfície gerada: **Plano**



Equação: $z = ax^2 + by^2 + c$

Superfície gerada: **Parabolóide elíptico**

Características

Podemos classificar as funções de duas variáveis em explícitas ou implícitas.

Explícitas

Podem ser colocadas na forma : $z = f(x, y)$

Implícitas

Podem ser colocadas na forma: $f(x, y) = 0$

Funções de várias variáveis

Definição: Diz-se que z é uma **função** de $x, y, \dots, t$, e escreve-se $z = f(x, y, \dots, t)$, quando a correspondência entre z e o conjunto $(x, y, \dots, t)$ é tal que para cada grupo $(x_i, y_i, \dots, t_i)$ o valor de z_i fique univocamente definido.

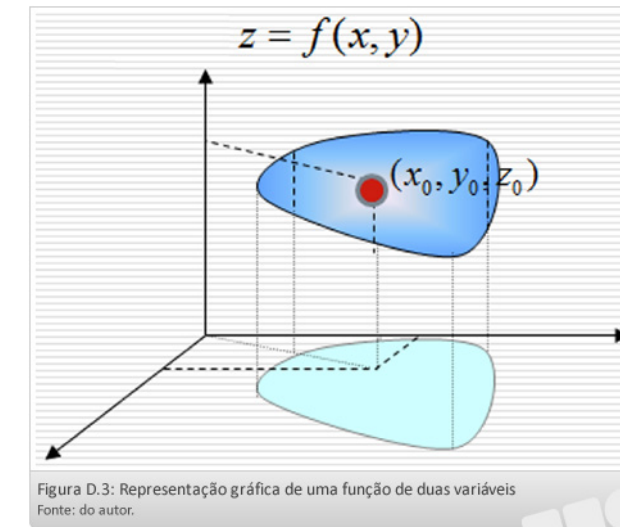


Figura D.3: Representação gráfica de uma função de duas variáveis
Fonte: do autor.

Domínio de $f(x, y, \dots, t)$: é o conjunto de todos os valores $(x, y, \dots, t)$ possíveis para as variáveis independentes.

Exemplo:

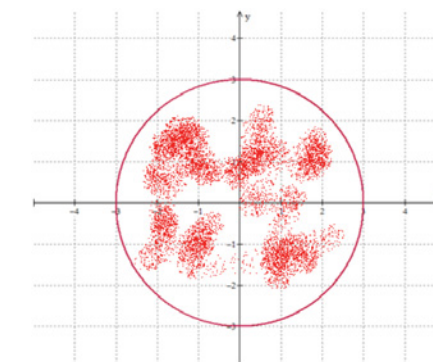
Determine o domínio da função abaixo e represente-o graficamente

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$$

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

$$\text{Dom } f = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 9$$



Limites de funções de duas variáveis

Dada uma função $f(x,y)$, dizemos que o limite de f é igual a L quando (x,y) se aproxima de um ponto de referência (a,b) , se pudermos tornar os valores de $f(x,y)$ tão próximos de L conforme (x,y) se aproximar de (a,b) .

$$\lim_{x \rightarrow ab} f(x,y) = L$$

Para se estimar o limite de uma função de duas variáveis f no ponto (x_0, y_0) é necessário calcular esse valor por todas as **trajetórias** que passem por este ponto. Se em todos os casos o resultado for sempre o mesmo, digamos L , diz-se que o limite existe e que vale L .

Caso o limite não exista em alguma trajetória ou dê um valor diferente para trajetórias diferentes, dizemos que o limite não existe.

Exemplo

Mostre que a função abaixo não tem limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$.

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y}$$

Tentamos calcular o limite por substituição direta, o que gera a indeterminação $0/0$.

Tomamos uma trajetória que passe pelo ponto $(0,0)$, $y=kx^2$.

$$f(x, kx^2) = \frac{2x^2 kx^2}{x^4 + (kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{ao longo de } y=kx^2}} f(x,y) = \frac{2k}{1+k^2}$$

Note que este limite varia de acordo com o valor escolhido para k . Logo, este limite não existe.

Continuidade

Uma função $f(x,y)$ é contínua no ponto (x_0, y_0) se:

$$\left. \begin{array}{l} (i) \text{ Existir } f(x_0, y_0); \\ (ii) \text{ Existir } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) \end{array} \right\} (iii) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

UNIDADE

D

ATIVIDADES

Usando o programa *winplot* para traçado de gráficos

O programa *winplot* pode ser usado para uma melhor visualização de gráficos com duas variáveis.

No site <http://www.gregosetroianos.mat.br/softwinplot.asp> existe uma boa explicação sobre o uso desse programa.

Resolver os seguintes exercícios

1. Seja a função dada por $f(x,y) = \ln(y-x)$. Determine:

- $f(1,2)$
- $f(0,0)$
- $f(-3, -4)$
- Domínio f
- Imagem f

2. Um tanque para estocagem de oxigênio líquido num hospital deve ter a forma de um cilindro circular reto de raio r e de altura l (em metros), com um hemisfério em cada extremidade. Descreva o volume do tanque em função da altura l e do raio r .

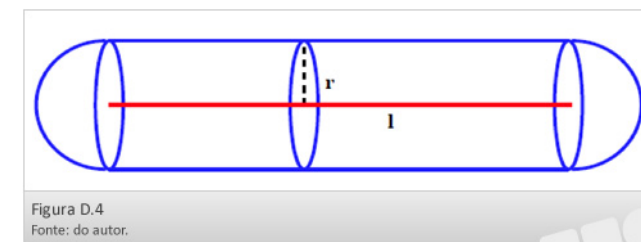


Figura D.4
Fonte: do autor.

3. Encontre o domínio das seguintes funções:

- $f(x,y) = 2x - y^2$
- $f(x,y) = \frac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$
- $f(u,v,w) = \frac{uw}{u-2v}$
- $f(x,y) = \sqrt{9-x^2} - \sqrt{4-y^2}$
- $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$
- $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$
- $f(x,y) = \frac{\cos(x)(y^2-1)}{x^2-y^2}$

h. $f(x, y) = \log(36 - 4x^2 - 9y^2)$

i. $f(x, y) = \log(x^2 - y^2 - 1)$

4. Esboce o gráfico do domínio de cada uma das funções abaixo:

a. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

b. $f(x, y) = \frac{x}{x - y}$

c. $f(x, y) = \arcsen(x + y)$

d. $f(x, y) = \ln(y - x)$



tics



Derivadas parciais

Exercícios

Unidade E
Cálculo Vetorial

UNIDADE



DERIVADAS PARCIAIS

EXERCÍCIOS

1. Dada a função $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3x - 4$, calcule:

- a) $f(0, 0) =$
- b) $f(3, 4) =$
- c) $f(2, t) =$
- d) os valores de x para os quais $f(x, y) = -y^2$

2. Encontre uma função de várias variáveis que nos dê:

- a) O volume de água necessário para encher uma piscina redonda de x metros de raio e y metros de altura.
- b) A quantidade de rodapé, em metros, necessária para se colocar numa sala retangular de largura x e comprimento y .
- c) A quantidade, em metros quadrados, de papel de parede necessária para revestir as paredes laterais de um quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento, se a altura do quarto é z metros.
- d) O volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões x , y e z .
- e) A distância entre dois pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$.
- f) A temperatura nos pontos de uma esfera, se ela, em qualquer ponto, é numericamente igual a distância do ponto ao centro da esfera.

3. Calcule as derivadas parciais das funções a seguir:

- a) $z = x^2 \cdot \text{sen } y$
- b) $f(x, y) = x^2 + 3xy - 4y^2$
- c) $z = \text{sen}(3x) \cdot \cos(2y)$
- d) $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z}$

4. Determinar as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ das funções abaixo:

- a) $z = x^2 + 3y^2 + 4xy + 1$
- b) $z = x^2 \text{sen}(2xy)$
- c) $z = e^{x^2 - 2y^2 + 4x}$
- d) $z = \frac{1}{x + 2y + 1}$

5. Dado o ponto $P(-1, 4)$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ calcule:

- a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$
- b) $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 4)$
- c) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$
- d) $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 4)$

6. A função $T(x, y) = 60 - 2x^2 - 3y^2$ representa a temperatura em qualquer ponto de uma chapa. Encontre a razão de variação da temperatura em relação à distância percorrida ao longo da placa na direção dos eixos positivos x e y , no ponto $(1, 2)$. Considere a temperatura medida em graus Celsius e a distância em cm.

7. Determine as derivadas parciais de 2ª ordem das seguintes funções:

- a) $z = x^2 - 3y^3 + 4x^2y^2$
- b) $z = x^2y^2 - xy$
- c) $z = \ln xy$
- d) $z = e^{xy}$

8. Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de 2ª ordem contínuas e satisfaz a equação de Laplace

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, ela é dita uma função harmônica. Verifique se as funções dadas são harmônicas:



Funções vetoriais

Exercícios

Unidade I
Cálculo Vetorial

EXERCÍCIOS

Funções Vetoriais: Introdução

1. Determine o domínio de $r(t)$ e o valor de $r(t_0)$:

- a) $r(t) = \cos t i - 3t j$; $t_0 = \pi$
- b) $r(t) = (\sqrt{3t+1}, t^2)$; $t_0 = 1$
- c) $r(t) = \cos \pi t i - \ln t j + \sqrt{t-2} k$; $t_0 = 3$
- d) $r(t) = (2e^{-t}, \arcsen t, \ln(1-t))$; $t_0 = 0$

2. Descreva o gráfico da equação:

- a) $r = (3-2t)i + 5t j$
- b) $r = 2t i - 3 j + (1+3t)k$
- c) $r = 3i + 2\cos t j + 2\sen t k$
- d) $r = 2\cos t i - 3\sen t j + k$
- e) $r = -3i + (1-t^2)j + tk$

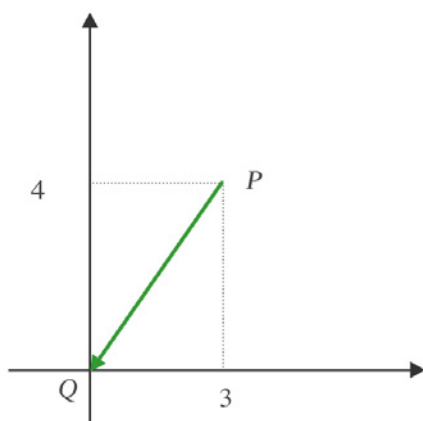
3. Obtenha a inclinação da reta que está representada por $r = (1-2t) i - (2-3t)j$.

4. Obtenha as coordenadas do ponto em que a reta $r = (2+t)i + (1-2t)j + 3t k$ intersecta o plano xy .

5. Esboce o segmento de reta representado pela equação:

- a) $r = (1-t)i + tj$; $0 \leq t \leq 1$
- b) $r = (1-t)(i+j) + t(i-j)$; $0 \leq t \leq 1$

6. Escreva uma equação vetorial para o segmento de reta de P a Q:



7. Esboce o gráfico de $r(t)$ e mostre o sentido de t crescente:

- a) $r(t) = 2i + tj$
- b) $r(t) = (3t - 4, 6t + 2)$
- c) $r(t) = (2 \cos t, 5 \sin t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$
- d) $r(t) = (1 + \cos t)i + (3 - \sin t)j$; $0 \leq t \leq 2\pi$
- e) $r(t) = 2 \cos t i + 2 \sin t j + tk$
- f) $r(t) = ti + t^2j + 2k$



Lista - Integrais de linha

Unidade J
Cálculo Vetorial

UNIDADE

LISTA – INTEGRAIS DE LINHA

1. Determine se $r(t)$ é uma função lisa de parâmetro t :

- a. $r(t) = t^3 i + (3t^2 - 2t)j + t^2 k$
- b. $r(t) = \cos t^2 i + \sin t^2 j + e^{-t} k$
- c. $r(t) = te^{-t} i + (t^2 - 2t)j + \cos \pi t k$
- d. $r(t) = \sin \pi t i + (2t - \ln t)j + (t^2 - t)k$

2. Encontre o comprimento de arco do gráfico de $r(t)$:

- a. $r(t) = t^3 i + tj + \frac{1}{2}\sqrt{6} t^2 k; \quad 1 \leq t \leq 3$
- b. $r(t) = (4 + 3t)i + (2 - 2t)j + (5 + t)k; \quad 3 \leq t \leq 4$
- c. $r(t) = 3 \cos t i + 3 \sin t j + t k; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
- d. $r(t) = t^2 i + (\cos t + t \sin t)j + (\sin t - t \cos t)k; \quad 0 \leq t \leq \pi$

3. Calcule a integral de linha em relação a s ao longo da curva C :

$$\int_C \frac{1}{1+x} ds \quad C: r(t) = ti + \frac{2}{3}t^{3/2}j \quad (0 \leq t \leq 3)$$

$$\int_C 3x^2 yz \, ds \quad C: x = t, y = t^2, z = \frac{2}{3}t^3 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

4. Em cada parte, calcule a integral $\int_C (3x + 2y)dx + (2x - y)dy$ ao longo da curva indicada:

- a. O segmento de reta de $(0,0)$ até $(1,1)$.
- b. O arco parabólico $y=x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$.
- c. A curva $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ de $(0,0)$ até $(1,1)$.
- d. A curva $y=x^3$ de $(0,0)$ até $(1,1)$.

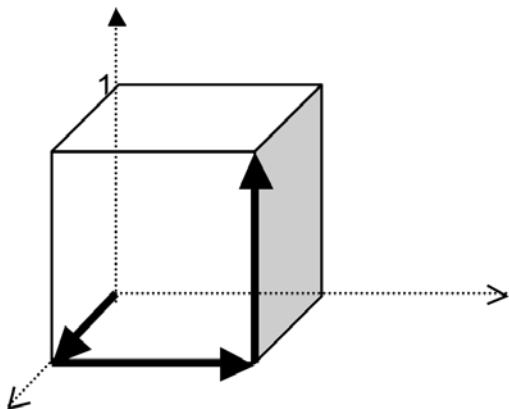
5. Calcule a integral de linha ao longo da curva C:

$$\int_C -ydx + xdy \quad C: y^2 = 3x \text{ de } (3,3) \text{ até } (0,0)$$

$$\int_C (x^2 + y^2)dx - xdy \quad C: x^2 + y^2 = 1, \text{ no sentido anti-horário de } (1,0) \text{ até } (0,1)$$

$$\int_C yzdx - xzdy + xydz \quad C: x = e^t, y = e^{3t}, z = e^{-t}; \quad (0 \leq t \leq 1)$$

6. Calcule $\int_C x^2 z dx - yx^2 dy + 3dz$ ao longo da curva C mostrada na figura.

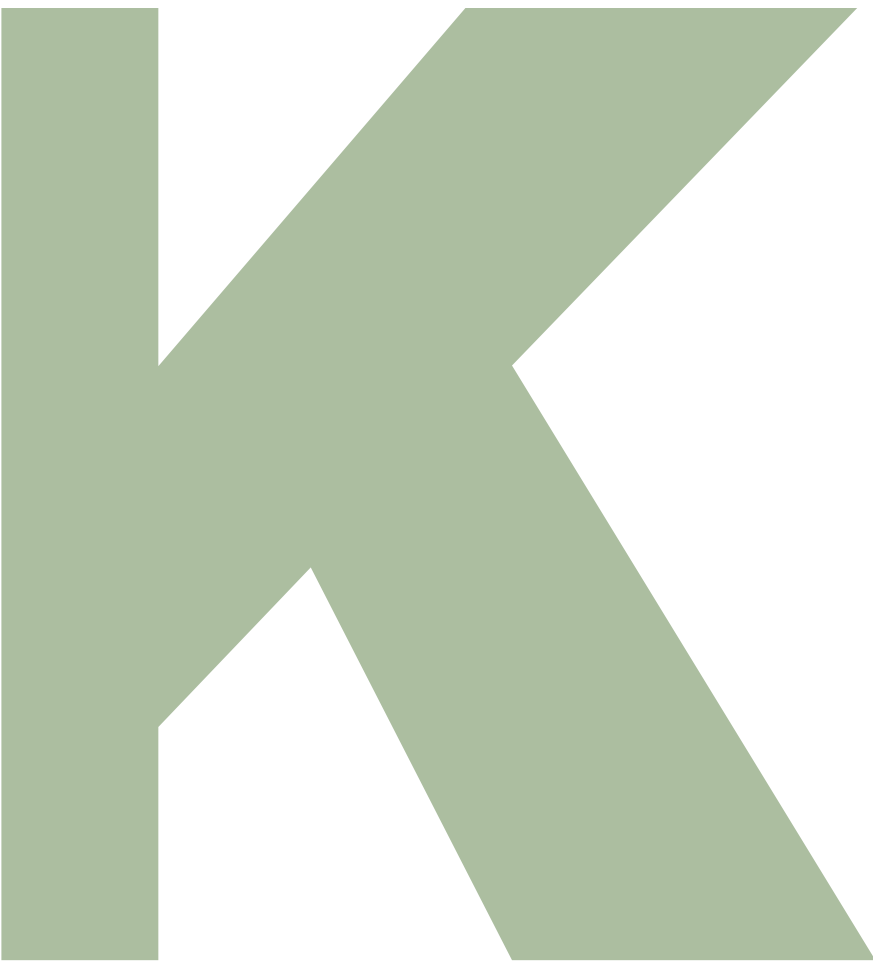


7. Calcule a massa de um arame fino com o formato da hélice $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 4t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) se a função de densidade for $\delta = \frac{kx}{1+y^2}$, $k > 0$.

8. Calcule a massa de um arame fino com o formato do arco circular $y = \sqrt{9-x^2}$ ($0 \leq x \leq 3$) se a função de densidade for $\delta = x\sqrt{y}$.



tics



Campos Vetoriais

Exercícios

Unidade K
Cálculo Vetorial

K.6 EXERCÍCIOS

Campos Vetoriais

1. Esboce o campo vetorial desenhando alguns vetores que não se intersectem:

- $F(x,y) = 2i - j$
- $F(x,y) = (y, -x)$
- $F(x,y) = yj$

2. Determine a divergência e o rotacional dos seguintes campos de vetores:

- $F(x, y, z) = (x + y + z, x^2, x)$
- $F(x, y, z) = (x + y + z, x^2, yz)$
- $F(x, y, z) = (x^2 + y^3 + z^4, xyz, xz + yz)$
- $F(x, y, z) = (xyz^2, xy^3z, -xyz^3)$
- $F(x, y, z) = (\cos(x) \operatorname{sen}(y), \cos(xz), \operatorname{sen}(yz))$
- $F(x, y, z) = (e^x \cos(y), e^x \operatorname{sen}(y), 0)$
- $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, xy, xyz)$
- $F(x, y, z) = (xy^2, 2xy^2z, 3xy^2z)$
- $F(x, y, z) = (\cos(xy), \cos(yz), \operatorname{sen}(xz))$

3. Determine se os seguintes campos são conservativos e, em caso afirmativo, ache o seu potencial:

- $F(x, y, z) = (2xz + y^2, 2xy, e^z + x^2)$
- $F(x, y, z) = (xy, e^x, e^z)$
- $F(x, y, z) = (\ln(xy), \ln(yz), \ln(zx))$
- $F(x, y, z) = (e^x, 2e^y, 3e^z)$
- $F(x, y) = (10xy + y \operatorname{sen}(xy), 5x^2)$
- $F(x, y, z) = (1 + y \operatorname{sen}(xy), 1 - \cos(xz, z))$
- $F(x, y, z) = (6xy + z^3, 3x^2 - z, 3x^2 - y)$

4. Ache o valor das constantes a, b e c tais que o campo de vetores seja irrotacional:

a) $F(x, y, z) = (axy - z^3, (a-2)x^2, (1-a)xz^2)$

b) $F(x, y, z) = (x + 2y + az, bx - 3y - z, 4x + cy + 2z)$

5. Calcule $\nabla \cdot (FXG)$ sendo $F(x, y, z) = 2xi + j + 4yk$ e $G(x, y, z) = x i + y j - z k$.

6. Calcule $\nabla \cdot (\nabla XF)$ sendo $F(x, y, z) = \sin x i + \cos(x-y)j + zk$.

7. Calcule $\nabla X(\nabla XF)$ sendo $F(x, y, z) = xy j + xyz k$.

8. Verifique que o vetor posição $r = x i + y j + z k$ tem as seguintes propriedades:

a) $\text{Rot } r = 0$

b) $\text{Div } r = 3$

9. Dada a função $F(x, y, z) = (x^2 - y, x^3 + z^2, -3xyz)$ determine $\text{rot}(x, y, z)$ em $P(1, 1/3, -1)$.