

INSTITUTO FEDERAL SUL-RIO-GRANDENSE

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

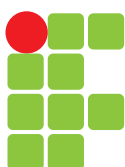
**Programa de Fomento ao Uso das
TECNOLOGIAS DE COMUNICAÇÃO E INFORMAÇÃO NOS CURSOS DE GRADUAÇÃO - TICS**

TICS

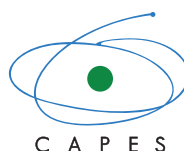
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA COMPUTAÇÃO

Prof. Luciano Vitoria Barboza

Ministério da
Educação



**INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE**



Copyright© 2011 Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal Sul-rio-grandense

Apostila de Fundamentos Matemáticos da Computação

BARBOZA, Luciano Vitoria

2011/2

Produzido pela Equipe de Produção de Material Didático da
Universidade Aberta do Brasil do Instituto Federal Sul-rio-grandense

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS

PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA

Dilma Rousseff

PRESIDENTE DA REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fernando Haddad

MINISTRO DO ESTADO DA EDUCAÇÃO

Luiz Cláudio Costa

SECRETÁRIO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR - SESU

Eliezer Moreira Pacheco

SECRETÁRIO DA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

Luís Fernando Massonetto

SECRETÁRIO DA EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA – SEED

Jorge Almeida Guimarães

PRESIDENTE DA COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE
NÍVEL SUPERIOR - CAPES

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE [IFSUL]**

Antônio Carlos Barum Brod

REITOR

Daniel Espírito Santo Garcia

PRÓ-REITOR DE ADMINISTRAÇÃO E DE PLANEJAMENTO

Janete Otte

PRÓ-REITORA DE DESENVOLVIMENTO INSTITUCIONAL

Odeli Zanchet

PRÓ-REITOR DE ENSINO

Lúcio Almeida Hecktheuer

PRÓ-REITOR DE PESQUISA, INOVAÇÃO E PÓS-GRADUAÇÃO

Renato Louzada Meireles

PRÓ-REITOR DE EXTENSÃO

**IF SUL-RIO-GRANDENSE
CAMPUS PELOTAS**

José Carlos Pereira Nogueira

DIRETOR-GERAL DO CAMPUS PELOTAS

Clóris Maria Freire Dorow

DIRETORA DE ENSINO

João Róger de Souza Sastre

DIRETOR DE ADMINISTRAÇÃO E PLANEJAMENTO

Rafael Blank Leitzke

DIRETOR DE PESQUISA E EXTENSÃO

Roger Luiz Albernaz de Araújo

CHEFE DO DEPARTAMENTO DE ENSINO SUPERIOR

IF SUL-RIO-GRANDENSE

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Luis Otoni Meireles Ribeiro

CHEFE DO DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Beatriz Helena Zanotta Nunes

COORDENADORA DA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL – UAB/IFSUL

Marla Cristina da Silva Sopeña

COORDENADORA ADJUNTA DA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL – UAB/
IFSUL

Cinara Ourique do Nascimento

COORDENADORA DA ESCOLA TÉCNICA ABERTA DO BRASIL – E-TEC/IFSUL

Ricardo Lemos Sainz

COORDENADOR ADJUNTO DA ESCOLA TÉCNICA ABERTA DO BRASIL – E-TEC/
IFSUL

IF SUL-RIO-GRANDENSE

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Beatriz Helena Zanotta Nunes

COORDENADORA DA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL – UAB/IFSUL

Marla Cristina da Silva Sopeña

COORDENADORA ADJUNTA DA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL – UAB/
IFSUL

Mauro Hallal dos Anjos

GESTOR DE PRODUÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO

**PROGRAMA DE FOMENTO AO USO DAS TECNOLOGIAS
DE COMUNICAÇÃO E INFORMAÇÃO NOS CURSOS DE
GRADUAÇÃO –TICS**

Raquel Paiva Godinho

GESTORA DO EDITAL DE TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO –
TICS/IFSUL

Ana M. Lucena Cardoso

DESIGNER INSTRUCIONAL DO EDITAL TICS

Lúcia Helena Gadret Rizzolo

REVISORA DO EDITAL TICS

EQUIPE DE PRODUÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO – UAB/IFSUL

Lisiane Corrêa Gomes Silveira
GESTORA DA EQUIPE DE DESIGN

Denise Zarnottz Knabach
Felipe Rommel
Helena Guimarães de Faria
Lucas Quaresma Lopes
EQUIPE DE DESIGN

Catiúcia Klug Schneider
GESTORA DE PRODUÇÃO DE VÍDEO

Gladimir Pinto da Silva
PRODUTOR DE ÁUDIO E VÍDEO

Marcus Freitas Neves
EDITOR DE VÍDEO

João Eliézer Ribeiro Schaun
GESTOR DO AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM

Giovani Portelinha Maia
GESTOR DE MANUTENÇÃO E SISTEMA DA INFORMAÇÃO

Carlo Camani Schneider
Efrain Becker Bartz
Jeferson de Oliveira Oliveira
Mishell Ferreira Weber
EQUIPE DE PROGRAMAÇÃO PARA WEB



GUIA DIDÁTICO	7
UNIDADE A - SISTEMAS DE NUMERAÇÃO	11
Introdução	13
Sistemas de Numeração	13
Teorema da Representação por Base	14
Conversão de Bases	14
Resumo	14
Lista de exercícios	14
UNIDADE B - ARITMÉTICA COMPUTACIONAL	17
Introdução	19
Sistemas de representação de números em um computador digital	21
Erros absolutos e erros relativos	21
Erros de arredondamento e erros de truncamento em um sistema de ponto flutuante	21
Análise de erro nas operações aritméticas de ponto flutuante	21
Lista de exercícios	21
UNIDADE C - CONJUNTOS	25
Introdução	27
Noção de conjuntos	28
Notação de conjuntos	28
Descrição de conjuntos	21
Conjunto universo e conjunto vazio	21
Relações entre conjuntos	21
Conjuntos de conjuntos	21
Operações Binárias e Unárias	21
Operações com conjuntos	21
Identidades envolvendo conjuntos	21
Conjuntos contáveis e não-contáveis	21
Lista de exercícios	21
UNIDADE D - RELAÇÕES	33
Introdução	35
Relações Binárias	37
Ordens parciais	37
Relações de equivalência	37
Lista de exercícios	37
UNIDADE E - FUNÇÕES	39
Introdução	41
Terminologia para funções	42
Propriedades de funções	37
Composição de Funções	37
Funções inversas	37
Permutações	37
Conjuntos equivalentes	37
Ordem de grandeza de funções	37
Lista de exercícios	37

UNIDADE F - COMBINATÓRIA	47
Introdução	37
O princípio da multiplicação	49
Princípio da Adição	37
Os princípios da multiplicação e da adição juntos	37
Princípio de inclusão e exclusão	37
O princípio das Casas de Pombo	37
Permutações	37
Combinações	37
Resumo	37
Lista de exercícios	37
UNIDADE G - MATRIZES	51
Terminologia	53
Operações Matriciais	54
Matriz Identidade	55
Transposta de uma matriz	37
Inversa de uma matriz	37
Matrizes Booleanas	37
Lista de exercícios	37
UNIDADE H - ESTRUTURAS ALGÉBRICAS	51
Definições e exemplos	53
Resultados básicos sobre grupos	54
Subgrupos	55
Grupos isomorfos	37
Lista de exercícios	37
UNIDADE I - ÁLGEBRA DE BOOLE E LÓGICA COMPUTACIONAL	51
Estrutura da Álgebra de Boole	53
Circuitos Lógicos	54
Lista de Exercícios	55

APRESENTAÇÃO

Prezado(a) aluno(a)

Bem-vindo(a) ao espaço de estudo da Disciplina de Fundamentos Matemáticos da Computação.

A Matemática Discreta ou Fundamentos Matemáticos para a Computação aplica-se a várias disciplinas de cursos como Computação, Informática, Matemática, Sistemas de Informação, como, por exemplo, Sistemas Operacionais, Bancos de Dados, Compiladores, Estruturas de Dados, Técnicas Digitais, Algoritmos, Complexidade de Algoritmos, Teoria da Computação, Linguagens Formais e Autômatos, Modelos para Concorrência, Semântica Formal, Teoria das Categorias, Programação, Paradigmas de Linguagens de Programação, Teoria dos Grafos, Análise Combinatória e Probabilidade Discreta, entre outras.

Nesta disciplina, serão desenvolvidos conceitos que irão enfatizar a importância do pensamento lógico, do poder da notação matemática e da utilidade de abstração. Entre as disciplinas de um curso na área da tecnologia da informação, as de estruturas discretas são as menos valorizadas na época em que são cursadas, e as mais valorizadas mais tarde. É bastante comum ouvirmos dos alunos o seguinte comentário: “Todas as disciplinas que cursei depois usaram conceitos de estruturas discretas”.

Nas unidades, serão abordados conteúdos como: Sistemas de Numeração, Aritmética Computacional, Teoria dos Conjuntos, Relações, Funções, Combinatória, Matrizes, Estruturas Algébricas, Álgebra de Boole e Lógica Combinacional.

Esperamos que, através dos conteúdos e das atividades propostas, você possa estabelecer subsídios para a compreensão. E, para tal, você pode contar com toda a equipe.

Objetivo Geral

Dotar o aluno de conhecimento básico dos conceitos matemáticos necessários para o aprendizado bem fundamentado das várias áreas da informática.

Habilidades

- Conhecer os elementos básicos da Lógica Matemática.
- Conhecer os fundamentos de Teoria dos Conjuntos.
- Conhecer as principais características e propriedades das relações e das funções.
- Conhecer a definição e propriedades de ordens e conjuntos.
- Conhecer os princípios básicos da Álgebra Booleana.
- Conhecer as definições, tipos, exemplos e principais propriedades das estruturas algébricas mais importantes.

Metodologia

A disciplina será desenvolvida em 60 horas-aula através do Ambiente Virtual de Aprendizado Moodle, onde serão disponibilizados materiais para subsidiar a aprendizagem. Os recursos tecnológicos para interação serão fóruns, chats de dúvidas, e-mail, textos e exercícios de fixação.

Avaliação

A avaliação dar-se-á mediante a participação nos fóruns e nas atividades propostas, tanto presenciais como a distância.

Programação

Primeira semana

As atividades a serem desenvolvidas na primeira semana são:

1. Fórum: Apresentação do professor, da disciplina e questões gerais.
2. Leitura e estudo do conteúdo: Sistemas de Numeração.
3. Realização da lista de exercícios: Unidade A – Sistemas de Numeração.

Segunda semana

As atividades a serem desenvolvidas na segunda semana são:

4. Leitura e estudo do conteúdo: Aritmética Computacional.
5. Realização da lista de exercícios: Unidade B – Aritmética Computacional.
6. Participação do Fórum de discussão proposto pelo professor.

Terceira semana

As atividades a serem desenvolvidas na terceira semana são:

7. Leitura e estudo do conteúdo: Conjuntos.
8. Realização da lista de exercícios: Unidade C – Conjuntos.

Quarta semana

As atividades a serem desenvolvidas na quarta semana são:

9. Leitura e estudo do conteúdo: Relações.
10. Realização da lista de exercícios: Unidade D – Relações.
11. Participação no chat em horário marcado pelo professor formador.

Quinta semana

As atividades a serem desenvolvidas na quinta semana são:

12. Leitura e estudo do conteúdo: Funções (até a seção E.5 inclusive).
13. Realização da lista de exercícios: Unidade E – Funções (até o exercício 7 inclusive).

Sexta semana

As atividades a serem desenvolvidas na sexta semana são:

14. Leitura e estudo do conteúdo: Funções (a partir da seção E.6).
15. Realização da lista de exercícios: Unidade E – Funções (a partir do exercício 8).

Sétima semana

As atividades a serem desenvolvidas na sétima semana são:

16. Leitura e estudo do conteúdo: Combinatória (até a seção F.5 inclusive).
17. Realização da lista de exercícios: Unidade F – Combinatória (até o exercício 11).
18. Participação do Fórum de discussão proposto pelo professor.

Oitava semana

As atividades a serem desenvolvidas na oitava semana são:

19. Leitura e estudo do conteúdo: Combinatória (a partir da seção F.6).
20. Realização da lista de exercícios: Unidade F – Combinatória (a partir do exercício 12).

Nona semana

As atividades a serem desenvolvidas na nona semana são:

21. Leitura e estudo do conteúdo: Matrizes.
22. Realização da lista de exercícios: Unidade G – Matrizes.

Décima semana

As atividades a serem desenvolvidas na décima semana são:

23. Leitura e estudo do conteúdo: Estruturas Algébricas.
24. Realização da lista de exercícios: Unidade H – Estruturas Algébricas.
25. Participação no chat em horário marcado pelo professor formador.

Décima-primeira semana

As atividades a serem desenvolvidas na décima - primeira semana são:

- 26. Leitura e estudo do conteúdo: Álgebra de Boole e Lógica Computacional (toda a seção I.1).
- 27. Realização da lista de exercícios: Unidade I – Álgebra de Boole e Lógica Computacional (até o exercício 3 inclusive).

Décima-segunda semana

As atividades a serem desenvolvidas na décima - segunda semana são:

- 28. Leitura e estudo do conteúdo: Álgebra de Boole e Lógica Computacional (a partir da seção I.2).
- 29. Realização da lista de exercícios: Unidade I – Álgebra de Boole e Lógica Computacional (a partir do exercício 4).
- 30. Participação do Fórum de discussão proposto pelo professor.

Referências:

- FRANCO, N. M. B. Cálculo Numérico. São Paulo: Pearson Education, 2006.
- GERSTING, J. L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. Matemática Discreta. Porto Alegre: Bookman, 2004.
- MENEZES, P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática. Porto Alegre: Bookman, 2010.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais. São Paulo: Pearson Education, 1996.
- LOPES, J. G.; TOSCANI, L. V.; MENEZES, P. B. Aprendendo Matemática Discreta com Exercícios. Porto Alegre: Bookman, 2009.
- SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. Cálculo Numérico, São Paulo: Prentice Hall Brasil, 2003.

Currículo Professor-Autor:

- Graduação em Engenharia Elétrica – Universidade Católica de Pelotas – 1982.
- Graduação em Licenciatura em Disciplinas Especializadas de 2º Grau – Universidade Federal de Pelotas – 1987.
- Especialização em Ciência da Computação: Matemática Computacional – Universidade Católica de Pelotas – 1993.
- Mestrado em Engenharia Elétrica – Universidade Federal de Santa Catarina – 1997.
- Doutorado em Engenharia Elétrica – Universidade Federal de Santa Catarina – 2001.

Tics

A

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Unidade A
Fundamentos Matemáticos
da Computação

UNIDADE

A

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

A.1 Introdução

Os sistemas de numeração têm por objetivo fornecer símbolos para representar as quantidades, de forma a registrar a informação quantitativa e poder processá-la. A representação de quantidades se faz com os números. Na antiguidade, duas formas de representar quantidades foram inventadas. Inicialmente, os egípcios criaram um sistema em que cada dezena era representada por um símbolo diferente.

Relembremos ainda outro sistema, o sistema de numeração romano. Eram usados símbolos (letras) que representavam as quantidades, como por exemplo: I (valendo 1), V (valendo 5), X (valendo 10), C (valendo 100), etc. A regra de posicionamento determinava que as letras que representavam quantidades maiores e precediam as que representavam quantidades menores, seriam somadas; se o inverso ocorresse, o menor valor era subtraído do maior. Assim, a quantidade 127 era representada por CXXVII; enquanto que a quantidade 94 era representada por XCIV.

Nesses sistemas, os símbolos tinham um valor intrínseco, independente da posição que ocupavam na representação (sistema numérico não-posicional). Um grande problema desse sistema é a dificuldade de realizar operações com essa representação. Experimente, por exemplo, multiplicar CXXVII por XCIV. Assim, posteriormente foram criados sistemas em que a posição dos algarismos no número passou a alterar seu valor. Esses sistemas numéricos são conhecidos como sistemas de numeração posicionais. Nestes sistemas, o valor representado pelo algarismo no número depende da posição em que ele aparece na representação. Um exemplo é o sistema numérico que utilizamos no nosso dia a dia (sistema decimal).

No estudo de sistemas numéricos voltados para aplicações na área da computação, a ênfase consiste em sistemas de numeração posicionais. Assim, passaremos a chamar estes sistemas simplesmente de *sistemas de numeração*.

A.2 Sistemas de Numeração

Um sistema numérico deve:

- representar uma grande quantidade de números;
- dar a cada número representado uma única descrição;
- refletir as estruturas algébricas e aritméticas dos números.

Os sistemas de numeração são compostos por:

- uma base;
- um conjunto de símbolos que representam os algarismos.

A base de um sistema é a quantidade de algarismos disponível na representação. Os principais sistemas de numeração utilizados estão mostrados na Tabela A.1.

Sistema	Base	Símbolos
Binário	2	$S = \{0, 1\}$
Octal	8	$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
Decimal	10	$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Hexadecimal	16	$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Tabela A.1 Principais sistemas numéricos.

A base 10 é hoje a mais usualmente empregada, embora não seja a única utilizada. No comércio pedimos uma dúzia de rosas e também marcamos o tempo em minutos e segundos (base 60).

Os computadores utilizam a base 2 (sistema binário) e os programadores, por facilidade, usam em geral uma base que seja uma potência de 2, tal como $2^3 = 8$ (base 8 ou sistema octal) ou ainda $2^4 = 16$ (base 16 ou sistema hexadecimal).

A partir de agora, iremos utilizar o valor da base como subscrito para identificar o sistema de numeração a que estamos nos referindo. Por exemplo:

$1011_2 \rightarrow$ base 2 ou sistema binário
 $4673_8 \rightarrow$ base 8 ou sistema octal
 $8751_{10} \rightarrow$ base 10 ou sistema decimal
 $FD23_{16} \rightarrow$ base 16 ou sistema hexadecimal

A Tabela A.2 mostra a correspondência entre os valores dos símbolos em cada base.

Binário	Octal	Decimal	Hexadecimal
0000	0	0	0
0001	1	1	1
0010	2	2	2
0011	3	3	3
0100	4	4	4
0101	5	5	5
0110	6	6	6
0111	7	7	7
1000	10	8	8
1001	11	9	9
1010	12	10	A
1011	13	11	B
1100	14	12	C
1101	15	13	D
1110	16	14	E
1111	17	15	F

Tabela A.2 Correspondência numérica entre os símbolos.

Você observa algo peculiar na Tabela A.2? Não?

Observe que todos os símbolos octais podem ser representados por números binários com três dígitos. Note também que todos os símbolos hexadecimais podem ser representados por números binários com quatro dígitos.

Isso é importante e vamos utilizar esta propriedade mais tarde.

A.3 Teorema da Representação por Base

Seja k um inteiro qualquer maior ou igual a 1, então, para cada inteiro positivo n , existe uma representação do tipo

$$n = a_0 k^s + a_1 k^{s-1} + a_2 k^{s-2} + \dots + a_{s-1} k + a_s k^0$$

onde os a_i , com $i = 0, 1, \dots, s$, são os símbolos do sistema numérico, $a_0 > 0$ e k é a base do sistema. Esta representação de n é única e é conhecida como a representação do número n na base k . Por exemplo,

$$1.548_{10} = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

onde $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 4$ e $a_3 = 8$.

A.4 Conversão de Bases

De um sistema qualquer para o sistema decimal

Utilizando o teorema da representação por base, podemos substituir a base pelo seu valor correspondente e efetuarmos os cálculos. O valor encontrado corresponde ao valor decimal do número em questão.

Os exemplos a seguir ilustram o exposto acima.

$$101110_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 = 32 + 8 + 4 + 2 = 46_{10}$$

$$27453_8 = 2 \times 8^4 + 7 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 12075_{10}$$

$$\begin{aligned} \text{FA3E}_{16} &= \text{F} \times 16^3 + \text{A} \times 16^2 + 3 \times 16^1 + \text{E} \times 16^0 = 15 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 3 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = \\ &= 64062_{10} \end{aligned}$$

Do sistema decimal para um sistema qualquer

Para a realização desse tipo de conversão, utiliza-se o procedimento conhecido como *método das divisões sucessivas*, no qual o número decimal é dividido sucessivamente pelo valor da base do sistema para o qual se deseja converter o número decimal. O procedimento é repetido até que não mais se possa dividir o dividendo pelo divisor. O número convertido é obtido tomando-se o último quociente e os restos das divisões de trás para diante.

Para a conversão de um número decimal para os sistemas binário, octal e hexadecimal divide-se sucessivamente o número decimal por 2, 8 e 16, respectivamente. Os exemplos a seguir ilustram o procedimento apresentado.

$$\begin{array}{r}
 46 \mid 2 \\
 \underline{0} \quad 23 \mid 2 \\
 \quad \underline{1} \quad 11 \mid 2 \\
 \quad \quad \underline{1} \quad 5 \mid 2 \\
 \quad \quad \quad \underline{1} \quad 2 \mid 2 \\
 \quad \quad \quad \quad \underline{0} \quad 1
 \end{array}
 \qquad
 46_{10} = 101110_2$$

$$\begin{array}{r}
 12075 \mid 8 \\
 \underline{3} \quad 1509 \mid 8 \\
 \quad \underline{5} \quad 188 \mid 8 \\
 \quad \quad \underline{4} \quad 23 \mid 8 \\
 \quad \quad \quad \underline{7} \quad 2
 \end{array}
 \qquad
 12075_{10} = 27453_8$$

$$\begin{array}{r}
 64062 \mid 16 \\
 \underline{14} \quad 4003 \mid 16 \\
 \quad \quad \underline{3} \quad 250 \mid 16 \\
 \quad \quad \quad \underline{10} \quad 15 \\
 \quad \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad \quad A \quad F
 \end{array}
 \qquad
 64062_{10} = FA3E_{16}$$

Do sistema binário para o sistema octal

Para realizar essa conversão, o primeiro passo é observar se o número de dígitos do número binário é múltiplo de 3 (você recorda da propriedade discutida ao final da Seção A.2?). Caso não seja, completa-se com zeros à esquerda. Depois, separa-se o número de dígitos do número binário em grupos de três. Por fim, basta converter cada grupo para o seu octal correspondente. Os exemplos a seguir ilustram o procedimento.

$$\begin{aligned}
 110111_2 &= 110_2 \ 111_2 = 67_8 \\
 1011001_2 &= 001011001_2 = 001_2 \ 011_2 \ 001_2 = 131_8
 \end{aligned}$$

Do sistema octal para o sistema binário

Para operar esse tipo de conversão, basta converter cada dígito octal para o seu correspondente binário com três dígitos (novamente a propriedade discutida ao final da Seção A.2). Os exemplos a seguir ilustram o procedimento.

$$\begin{aligned}
 51_8 &= 101 \ 001 = 101001_2 \\
 743_8 &= 111 \ 100 \ 011 = 111100011_2
 \end{aligned}$$

Do sistema binário para o sistema hexadecimal

Para realizar essa conversão, o primeiro passo é observar se o número de dígitos do número binário é múltiplo de 4 (olhem a propriedade discutida ao final da Seção A.2 outra vez). Caso não seja, completa-se com zeros à esquerda. Depois, separa-se o número de dígitos do número binário em grupos de quatro. Por fim, basta converter cada grupo para o seu hexadecimal correspondente. Os exemplos a seguir ilustram o procedimento.

$$\begin{aligned}
 10110111_2 &= 1011_2 \ 0111_2 = B7_{16} \\
 1011011001_2 &= 001011011001_2 = 0010_2 \ 1101_2 \ 1001_2 = 2D9_{16}
 \end{aligned}$$

Do sistema hexadecimal para o sistema binário

Para operar esse tipo de conversão, basta converter cada dígito hexadecimal para o seu correspondente binário com quatro dígitos (a mesma propriedade do final da Seção A.2). Os exemplos a seguir ilustram o procedimento.

$$FA_{16} = 1111\ 1010 = 11111010_2$$

$$B7C3_{16} = 1011\ 0111\ 1100\ 0011 = 1011011111000011_2$$

Resumo

Nesta unidade, estudamos os principais sistemas de numeração utilizados na área de Ciências da Computação. Aprendemos os símbolos e a base de cada sistema numérico e como realizar a conversão de um sistema para outro.

A seguir, vamos treinar os conhecimentos adquiridos, realizando uma lista de exercícios.

Lista de exercícios

Para cada número a seguir, faça a sua representação no sistema numérico solicitado.

1. $10011_2 = \underline{\hspace{2cm}}_8 = \underline{\hspace{2cm}}_{10} = \underline{\hspace{2cm}}_{16}$
2. $1110011_2 = \underline{\hspace{2cm}}_8 = \underline{\hspace{2cm}}_{10} = \underline{\hspace{2cm}}_{16}$
3. $101110011_2 = \underline{\hspace{2cm}}_8 = \underline{\hspace{2cm}}_{10} = \underline{\hspace{2cm}}_{16}$
4. $156_8 = \underline{\hspace{2cm}}_2 = \underline{\hspace{2cm}}_{10} = \underline{\hspace{2cm}}_{16}$
5. $5764_2 = \underline{\hspace{2cm}}_2 = \underline{\hspace{2cm}}_{10} = \underline{\hspace{2cm}}_{16}$
6. $2453_2 = \underline{\hspace{2cm}}_2 = \underline{\hspace{2cm}}_{10} = \underline{\hspace{2cm}}_{16}$
7. $817_{10} = \underline{\hspace{2cm}}_2 = \underline{\hspace{2cm}}_8 = \underline{\hspace{2cm}}_{16}$
8. $7543_{10} = \underline{\hspace{2cm}}_2 = \underline{\hspace{2cm}}_8 = \underline{\hspace{2cm}}_{16}$
9. $22894_{10} = \underline{\hspace{2cm}}_2 = \underline{\hspace{2cm}}_8 = \underline{\hspace{2cm}}_{16}$
10. $3CA_{16} = \underline{\hspace{2cm}}_2 = \underline{\hspace{2cm}}_8 = \underline{\hspace{2cm}}_{10}$
11. $DE2F_{16} = \underline{\hspace{2cm}}_2 = \underline{\hspace{2cm}}_8 = \underline{\hspace{2cm}}_{10}$
12. $B4C8A_{16} = \underline{\hspace{2cm}}_2 = \underline{\hspace{2cm}}_8 = \underline{\hspace{2cm}}_{10}$

Tics

B

ARITMÉTICA COMPUTACIONAL

Unidade B
**Fundamentos Matemáticos
da Computação**

ARITMÉTICA COMPUTACIONAL

B.1 Introdução

Neste capítulo, vamos enfatizar que o conjunto dos números representáveis em uma máquina digital é finito, e portanto, *discreto*, ou seja, não é possível representar em um computador todos os números dentro de um determinado intervalo. A implicação imediata desta limitação computacional é que a simples soma de dois números ou o cálculo de uma função matemática, realizada com esses números, podem conter erros numéricos. Caso medidas apropriadas não sejam tomadas, esses problemas numéricos associados a imprecisões causadas, por exemplo, por simplificações do modelo matemático (algumas vezes necessárias para se obter um modelo matemático que apresente solução), por erros de truncamento (substituição de uma série infinita por uma finita), erros de arredondamento (inerentes à própria natureza da máquina digital), erros nos dados de entrada (dados imprecisos obtidos a partir de experimentos), ..., podem, em algumas situações, nos conduzir à perda de precisão dos resultados (mesmo em precisão dupla), ou em casos mais graves, conduzirem à obtenção de um resultado totalmente inútil.

Baseados nessas constatações, o objetivo deste capítulo é de alertar ao estudante para os problemas que podem surgir durante a resolução de um problema em uma máquina digital, bem como sugerir alternativas para evitá-los, ou ao menos reduzi-los, de modo a se obter uma resposta de boa qualidade para o problema em análise.

B.2 Sistemas de representação de números em um computador digital

Primeiramente, vamos analisar como os números são representados em um computador. Vamos dividir o nosso estudo em duas etapas: (i) para números inteiros; e (ii) para números reais.

Representação de um número inteiro

A representação de um número inteiro, a princípio, não apresenta nenhuma dificuldade. Qualquer computador opera internamente com uma base fixa b , onde b é um inteiro maior ou igual a 2, e é escolhido como uma potência de 2.

Assim, dado um número inteiro $n \neq 0$, este possui uma representação única dada por:

$$n = \pm(n_0b^0 + n_1b^1 + n_2b^2 + \dots + n_kb^k)$$

onde os n_i , $i = 0, 1, 2, \dots, k$ são inteiros que satisfazem $0 \leq n_i \leq b$ e $n_k \neq 0$.

Por exemplo, na base $b = 10$, o número **54672** é representado por

$$54672 = 2 \times 10^0 + 7 \times 10^1 + 6 \times 10^2 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^4$$

e são armazenados os coeficientes $n_0 = 2$, $n_1 = 7$, $n_2 = 6$, $n_3 = 4$ e $n_4 = 5$.

Representação de um número real

Um computador ou calculadora representa um número real em um sistema denominado *sistema de ponto flutuante normalizado*. Um número real r é dito um número de ponto flutuante normalizado se atender as seguintes condições:

$$r = m b^e$$

$$m = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \dots d_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq d_1 \leq b-1, \quad 0 \leq d_i \leq b-1, \quad i = 2, 3, 4, \dots, n$$

$$e_1 \leq e \leq e_2 \quad \text{sendo} \quad e_1 \leq 0, \quad e_2 \geq 1, \quad e_1, e_2 \in \mathbb{Z}$$

onde:

- b é a base do sistema de ponto flutuante, $b \geq 2$;
- m é a mantissa do número;
- e é o expoente do número, com e_1 sendo o menor e e_2 , o maior;
- n é o número máximo de dígitos que podem ser utilizados na representação do número. É conhecido como *precisão da máquina*;
- d_i são os dígitos da mantissa, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

A união de todos os números de ponto flutuante com o zero, chamada de *Sistema de Ponto Flutuante*, é representada por:

$$0 = \underbrace{0.000\dots 0}_{n \text{ vezes}} \cdot b^{e_1}$$

Para facilitar a especificação do sistema de ponto flutuante de uma máquina digital, usualmente, o representamos por $F(b, n, e_1, e_2)$, onde e_1 e e_2 são, respectivamente, o menor e o maior expoente, b é a base do sistema de numeração e n é a precisão da máquina.

Para exemplificar este procedimento de representação de um sistema de ponto flutuante, considere a calculadora científica da Hewlett-Packard HP 48G. O seu sistema de ponto flutuante é $F(10, 12, -500, 499)$. Portanto, essa calculadora opera com o sistema numérico decimal, utiliza como precisão 12 dígitos (as mantissas são representadas por 12 dígitos), e o menor e o maior expoente valem, respectivamente -500 e 499 .

Propriedades dos Números em Sistemas de Ponto Flutuante

Seja um sistema de ponto flutuante especificado por $F(b, n, e_1, e_2)$.

1. O menor número, em valor absoluto, que pode ser representado é

$$\underbrace{0.100\dots 0}_{n \text{ vezes}} \cdot b^{e_1}$$

2. O maior número, em valor absoluto, que pode ser representado é

$$\underbrace{0.(b-1)(b-1)(b-1)\dots(b-1)}_{n \text{ vezes}} \cdot b^{e_2}$$

3. Quantidade total de números que podem ser representados

Lembre que o primeiro dígito da mantissa deve ser diferente de 0. Assim, para a primeira posição da mantissa, temos $(b - 1)$ dígitos possíveis. Para as $(n - 1)$ posições restantes da mantissa, podemos ter b dígitos. Por outro lado, cada uma dessas mantissas pode ter um dos $(e_2 - e_1 + 1)$ expoentes possíveis (note que o $+1$ é para considerar o expoente zero). Ainda temos que incluir o número 0 e considerar que os números podem ser positivos e negativos. Dessa forma, considerando todas as possibilidades, chegamos a um total de:

$$2(b - 1)(b^{n-1})(e_2 - e_1 + 1) + 1$$

números de ponto flutuante passíveis de serem representados no sistema $F(b, n, e_1, e_2)$.

4. Para qualquer mantissa m , temos que $b^{-1} \leq |m| < 1$.

- $|m| < 1$, pois toda mantissa deve ter o dígito zero antes do ponto;
- $|m| \geq b^{-1}$, pois se $|m| < b^{-1}$, não teríamos o número normalizado, pois o primeiro dígito da mantissa (após o ponto) seria nulo.

Os exemplos a seguir irão ilustrar os aspectos importantes em relação à representação dos números reais em sistemas de ponto flutuante.

- **Exemplo B.1:** Considere o sistema de ponto flutuante hipotético $F(10, 2, -1, 1)$. O total de números reais que podem ser representados nesse sistema é:

$$2 \cdot (10 - 1)(10^{2-1})[1 - (-1) + 1] + 1 = 2 \times 9 \times 10 \times 3 + 1 = 541$$

O menor número é 0.10×10^{-1} e o maior 0.99×10^1 , em valores absolutos.

- **Exemplo B.2:** Considere agora o sistema de ponto flutuante hipotético $F(2, 3, -1, 2)$. O total de números reais que podem ser representados nesse sistema é

$$2 \cdot (2 - 1)(2^{2-1})[2 - (-1) + 1] + 1 = 2 \times 1 \times 2 \times 4 + 1 = 17$$

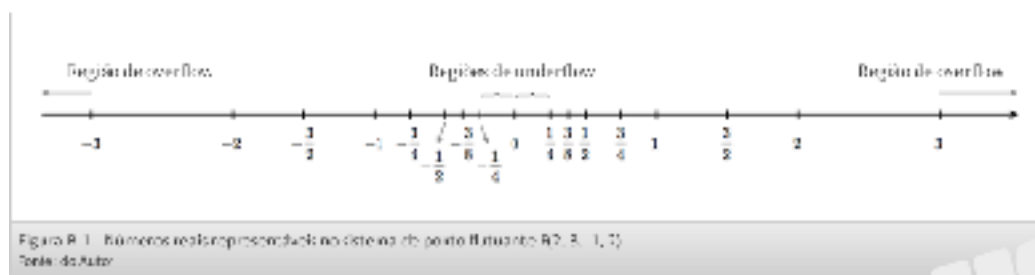
O menor número é $0.10 \times 2^{-1} = 0,01_2 = 0,25_{10}$ e o maior, $0.11 \times 10^2 = 11_2 = 3$, em valores absolutos.

A Tabela B.1 mostra todos os números reais que podem ser representados nesse sistema de ponto flutuante. A primeira linha da tabela corresponde a todos os expoentes possíveis, enquanto que a primeira coluna corresponde a todas as mantissas possíveis. A tabela apresenta os 8 números positivos que podem ser representados no sistema de ponto flutuante do exemplo.

$\begin{matrix} m \\ e \end{matrix}$	-1	0	1	2
0.10	$0,01_2 = 0,25_{10} = \frac{1}{4}$	$0,1_2 = 0,5_{10} = \frac{1}{2}$	$1_2 = 1_{10}$	$10_2 = 2_{10}$
0.11	$0,011_2 = 0,375_{10} = \frac{3}{8}$	$0,11_2 = 0,75_{10} = \frac{3}{4}$	$1,1_2 = 1,5_{10} = \frac{3}{2}$	$11_2 = 3_{10}$

Tabela B.1 Números reais positivos representáveis no sistema de ponto flutuante $F(2, 3, -1, 2)$.

Todos os números que podem ser representados no sistema de ponto flutuante $F(2, 3, -1, 2)$ estão assinalados na reta dos números reais, conforme mostra a Figura B.1.



Pela observação da Tabela B.1, percebemos que não se consegue representar números em ponto flutuante menores que $0,25$ e nem maiores que $-0,25$. Essa região é conhecida como *região de underflow* da máquina. De forma semelhante, números em ponto flutuante maiores que 3 e menores que -3 também não são passíveis de representação. Essa é a *região de overflow* da máquina. Assim, definimos essas regiões como:

- **região de underflow:** corresponde às regiões entre o maior número de ponto flutuante negativo e o zero e entre o zero e o menor número de ponto flutuante positivo. No Exemplo B.2, esta região corresponde a $(-1/4, 0) \cup (0, 1/4)$
- **região de overflow:** corresponde às regiões aquém do menor número de ponto flutuante negativo e além do maior número de ponto flutuante positivo. No Exemplo B.2, essa região corresponde a $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
- **Exemplo B.3:** Considere o sistema de ponto flutuante $F(10, 2, -1, 2)$. Neste sistema, os números $x = 0,068$ e $y = 0,039$ são representados, respectivamente, por $x = 0,68 \cdot 10^{-1}$ e $y = 0,39 \cdot 10^{-1}$. Observe que ambos os números possuem representação exata no sistema de ponto flutuante dado.

Agora, vamos realizar a soma entre os números x e y . Utilizando o conjunto dos números reais, temos que o resultado da soma é $0,107$. Escrevendo o resultado na forma de ponto flutuante normalizado, temos $0,107 \cdot 10^0$. Observe que este resultado, quando escrito no sistema de ponto flutuante do Exemplo B.3, será armazenado como $0,10 \cdot 10^0$ ou como $0,11 \cdot 10^0$, dependendo do sistema de arredondamento que a máquina utilizar. Percebe-se, então, que embora os operandos numéricos possuam representação exata no sistema de ponto flutuante, a sua soma apresentará um resultado errôneo, pois ela não é passível de ser representada exatamente no sistema de ponto flutuante.

Os exemplos apresentados têm por objetivo chamar a atenção de você estudante para possíveis problemas numéricos que podemos encontrar quando trabalhando com máquinas digitais. É muito importante você ter claro em sua mente que:

- os sistemas de ponto flutuante utilizados pelos computadores digitais não são capazes de representar com exatidão todos os números do conjunto dos números reais;
- mesmo que os números a serem operados possuam representação exata, é possível que o resultado da operação não o possua.

B.3 Erros absolutos e erros relativos

Definimos como *erro absoluto (EA)* a diferença entre o valor exato de uma medida numérica x^* e o seu valor aproximado x . Assim, matematicamente, temos:

$$EA = x^* - x$$

Em geral, somente conhecemos o valor x para a medida e, assim, é impossível obter o valor exato do erro absoluto. Sendo assim, o que se faz é obter um limite superior ou uma estimativa para o módulo do erro absoluto.

Considere, por exemplo, o número π . Sabemos que $\pi^* \in (3,14; 3,15)$. Tomando para π qualquer valor dentro do intervalo dado, teremos $|\text{EA}| = |\pi^* - \pi| < 0,01$.

Por outro lado, o erro absoluto nem sempre descreve com precisão um cálculo. Esse fator está associado à ordem de grandeza dos números envolvidos. Por esse motivo, utilizamos também um outro tipo de erro para essa análise, o *erro relativo*.

O erro relativo é definido como o erro absoluto dividido pelo valor aproximado. Matematicamente,

$$\text{ER} = \frac{\text{EA}}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

- **Exemplo B.4:** Considere as medidas para os números $x = 987,3$ com $|\text{EA}_x| < 0,1$ e $y = 3,2$ com $|\text{EA}_y| < 0,1$. Analisemos, primeiramente, o número x . Com o erro relativo $|\text{EA}_x|$, temos que o valor exato para $x^* \in (987,2; 987,4)$. O erro relativo para a medida x é, então,

$$|\text{ER}_x| = \frac{|\text{EA}_x|}{x} < \frac{0,1}{987,3} \approx 1,0 \cdot 10^{-4}$$

Por outro lado, para a medida y temos que o seu valor exato é $y^* \in (3,1; 3,3)$. Portanto,

$$|\text{ER}_y| = \frac{|\text{EA}_y|}{y} < \frac{0,1}{3,2} \approx 0,031$$

Os valores calculados para os erros relativos das medidas x e y , nos permitem concluir que a medida x apresenta uma exatidão melhor do que a medida y .

B.4 Erros de arredondamento e erros de truncamento em um sistema de ponto flutuante

Na Seção B.2 estudamos que a representação de um número depende fundamentalmente da máquina digital utilizada, pois seu sistema de ponto flutuante estabelecerá a base de numeração usada, o número total de dígitos da mantissa, os expoentes mínimo e máximo, ...

Para entendermos melhor esse assunto, vamos recordar o Exemplo B.3. Nesse, a soma dos números x e y , igual a $0,107.10^0$ em ponto flutuante normalizado, não possuía representação exata no sistema de ponto flutuante $F(10, 2, -1, 2)$. Observe que o número máximo de dígitos da mantissa é 2. Assim, para que a máquina digital armazene o resultado, ela irá utilizar apenas dois dígitos na mantissa e, utilizando algum critério pré-especificado, descartar o último dígito. Caro estudante, é assim que aparecem os *erros de truncamento* e *erros de arredondamento*.

No *truncamento*, os dígitos que excedem o número máximo de dígitos da mantissa são simplesmente descartados (desprezados). Assim, o número $0,107.10^0$ será armazenado, por truncamento, como $0,10.10^0$.

No *arredondamento*, o primeiro dígito que excede o número total de dígitos da mantissa é levado em consideração para definir o armazenamento. A forma de arredondamento mais utilizada é o *arredondamento simétrico*. Nesse, o sistema prevê que o último dígito armazenável pela mantissa é:

- mantido se o dígito após si estiver entre **0 e 4**;
- aumenta em uma unidade se o dígito após si estiver entre **5 e 9**.
- **Exemplo B.5:** Considere o sistema de ponto flutuante $F(10, 3, -5, 5)$. O número **3648** é armazenado, por arredondamento, como $0,365 \cdot 10^4$. Por sua vez, o número **423,2** é armazenado, por arredondamento, como $0,423 \cdot 10^3$.

Análise de erro nas operações aritméticas de ponto flutuante

Dada uma sequência de operações aritméticas, por exemplo, $(a + b)(c - d) + e$, em termos de cálculo digital, torna-se importante para nós termos noção como os erros numéricos se propagam ao longo das operações aritméticas.

O erro numérico total em operações aritméticas é composto pelo erro de armazenamento das parcelas, ou fatores, mais o erro de armazenamento dos resultados parciais das operações.

Os exemplos a seguir irão ilustrar para você estudante como os erros numéricos se propagam em operações aritméticas de ponto flutuante. Para esses exemplos, considere o sistema de ponto flutuante $F(10, 4, -5, 5)$ e os números $x = 642,8$ e $y = 31,67$. É importante que observemos que ambos os números possuem representação exata no sistema de ponto flutuante, isto é, $x = 0,6428 \cdot 10^3$ e $y = 0,3167 \cdot 10^2$.

- **Exemplo B.6:** Análise do erro na operação de adição, ou seja, em $x + y$.
Para a operação de adição em aritmética de ponto flutuante é necessário realizar o alinhamento dos pontos decimais dos números. Para isso, a mantissa do número de menor expoente tem que ser deslocada para a direita. Esse deslocamento corresponde a um número de casas decimais igual à diferença entre os dois expoentes. Portanto, para a adição temos que:

$$x = 0,6428 \cdot 10^3 \quad \text{e} \quad y = 0,03167 \cdot 10^3$$

$$x + y = (0,6428 + 0,03167) \cdot 10^3 = 0,67447 \cdot 10^3$$

Esse é o resultado exato da adição. Como o sistema de ponto flutuante aceita apenas 4 dígitos na mantissa, o resultado da adição será:

- $0,6744 \cdot 10^3$, em caso de truncamento;
- $0,6745 \cdot 10^3$, em caso de arredondamento.
- **Exemplo B.7:** Análise do erro na operação de multiplicação, ou seja, em $x \times y$. Para essa operação aritmética, temos que:

$$x \times y = 0,6428 \cdot 10^3 \times 0,3167 \cdot 10^2 = 0,20357476 \cdot 10^5$$

Dessa forma, no sistema de ponto flutuante dado, temos que:

- $x \times y = 0,2035 \cdot 10^5$, em caso de truncamento;
- $x \times y = 0,2036 \cdot 10^5$, em caso de arredondamento.

Os Exemplos B.6 e B.7 reforçam o que já tínhamos observado no Exemplo B.3, isto é, mesmo que os operandos estejam representados exatamente no sistema de ponto flutuante, não podemos esperar que o resultado armazenado seja exato.

- **Exemplo B.8:** Considere os números $z = 16,47$ e $t = 3,291$. As operações de adição e multiplicação apresentam como resultados exatos:

$$z + t = 19,761$$

$$z \times t = 54,20277$$

Agora, considere duas máquinas com sistema de ponto flutuante $F(10, 3, -5, 5)$ e que armazenem os números utilizando, respectivamente, truncamento e arredondamento.

Analisemos, inicialmente, essas operações na máquina digital que realiza o armazenamento por truncamento. Nessa máquina, temos que $z = 0,164.10^2$, $t = 0,329.10^1$, $x + y = 0,197.10^2$ e $x \times y = 0,539.10^2$. Portanto, os erros relativos são iguais a:

$$ER_{\text{adição}} = 0,31\% \quad \text{e} \quad ER_{\text{multiplicação}} = 0,56\%$$

Agora, vamos analisar a máquina que realiza armazenamento por arredondamento. Nesse caso, temos que $z = 0,165.10^2$, $t = 0,329.10^1$, $x + y = 0,198.10^2$ e $x \times y = 0,543.10^2$. Portanto, os erros relativos são iguais a:

$$ER_{\text{adição}} = 0,20\% \quad \text{e} \quad ER_{\text{multiplicação}} = 0,18\%$$

Do Exemplo B.8, podemos concluir que a máquina que realiza o armazenamento por arredondamento apresenta erros relativos menores.

Agora, chegou a hora de testarmos os nossos conhecimentos.

Lista de exercícios

1. Considere o sistema de ponto flutuante $F(2, 2, -2, 3)$.

- Exiba todos os números representáveis nesse sistema e coloque-os sobre um eixo ordenado.
- Qual o maior número na base 10 que pode ser representado nesse sistema?
- Qual o menor número positivo na base 10 que pode ser representado nesse sistema?

2. Considere o sistema de ponto flutuante $F(3, 3, -2, 3)$. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Para as que forem falsas, dizer como seriam corretas.

- () No sistema dado, podemos representar 220 números.
- () O maior número positivo desse sistema é 25_{10} .
- () O menor número positivo desse sistema é $\left(\frac{1}{9}\right)_{10}$.
- () A representação de 7_{10} no sistema dado é $0,210.3^2$.
- () O número 28_{10} não pode ser representado no sistema.

3. Considere o sistema de ponto flutuante $F(10, 4, -5, 5)$. Pede-se:

- Qual o menor número e o maior número em módulo representados nessa máquina?
- Como será armazenado o número **73758** nessa máquina, se for usado arredondamento? E se for usado truncamento?
- Se $a = 42450$ e $b = 3$, qual o resultado de $a + b$?

- Qual o resultado da soma

$$S = 42450 + \sum_{i=1}^{10} 3$$

nessa máquina?

- Idem para a soma

$$S = \sum_{i=1}^{10} 3 + 42450$$

(Obviamente, o resultado deveria ser o mesmo. Porém, as operações devem ser realizadas na ordem em que aparecem, o que conduzirá a resultados diferentes).

4. É possível existir um sistema de ponto flutuante com $e_1 = -2$, $e_2 = 5$, $n = 2$ e com **37 elementos**? Justifique.

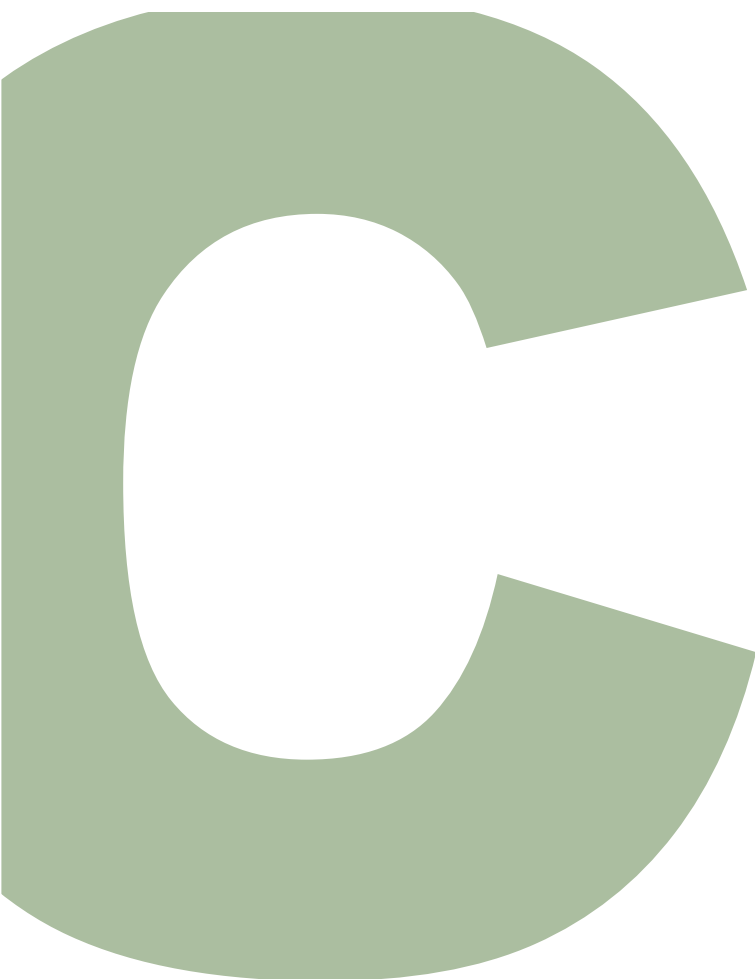
- Caso afirmativo, qual a base desse sistema?
- Caso negativo, qual o menor número de elementos de um sistema que podemos ter com esses dados?

5. Seja o sistema de ponto flutuante $F(10, 4, -10, 11)$ e os números $x = 72370$, $y = 21,45 \cdot 10^{-5}$ e $z = 2,585$. Efetue as operações indicadas e calcule o erro relativo no resultado. Considere que a máquina digital armazena os números por arredondamento.

- $x + y + z$
- $x - y - z$
- $x \div y$
- $x \times y \div z$
- $x \times (y \div z)$

6. Resolva a equação $3x^2 - 2x - 1 = 0$ em um sistema de ponto flutuante $F(10, 2, -2, 2)$ com arredondamento.

tics



CONJUNTOS

Unidade C
Fundamentos Matemáticos
da Computação

UNIDADE



CONJUNTOS

C.1 INTRODUÇÃO

A teoria dos conjuntos é um dos principais pilares da matemática. A grande maioria dos conceitos utilizados em matemática e em ciência da computação pode ser adequadamente expressa na linguagem dos conjuntos. Por sua vez, operações podem ser aplicadas a conjuntos de modo a produzir novos conjuntos. A maior parte dos conjuntos que interessam para cientistas da computação é finita ou enumerável, mas ainda existe um grande número de conjuntos que possuem tantos elementos que não são passíveis de serem enumerados.

C.2 NOÇÃO DE CONJUNTOS

Definições são importantes em qualquer ciência porque contribuem para a comunicação precisa. Porém, nós não iremos definir o termo conjunto, e sim, utilizaremos a ideia intuitiva de que um conjunto é uma coleção de objetos. Sendo assim, todos os objetos em um conjunto possuem uma propriedade comum que os identifica como pertencentes ao conjunto. Outros objetos que não possuam essa propriedade, não pertencem ao conjunto.

C.3 NOTAÇÃO DE CONJUNTOS

Nós iremos utilizar letras maiúsculas para denotar conjuntos, letras minúsculas para caracterizar os elementos do conjunto e o símbolo $\in$ para denotar a pertinência de um elemento a um conjunto. Dessa forma, $a \in A$ significa que o elemento a pertence ao conjunto A , ou a é um elemento do conjunto A .

Por outro lado, para caracterizarmos que um objeto não pertence a um conjunto, utilizaremos o símbolo $\notin$. Assim, $b \notin A$ significa que o elemento b não pertence ao conjunto A .

C.4 DESCRIÇÃO DE CONJUNTOS

Para que possamos descrever um determinado conjunto, temos que identificar de forma inequívoca os seus elementos. Baseados, nessa premissa, podemos utilizar basicamente duas diferentes maneiras para a descrição de conjuntos na teoria matemática. Iremos estudá-las a seguir.

POR LISTA

Isso é conseguido simplesmente listando, entre chaves, todos os elementos que compõem o conjunto.

Um exemplo de descrição de um conjunto por lista é o conjunto que contém alguns animais domésticos, isto é,

$$A = \{\text{gato, cachorro, passarinho}\}$$

Observe que nessa descrição, os elementos do conjunto não apresentam nenhuma ordem, de modo que $\{\text{cachorro, gato, passarinho}\}$ é o mesmo que $\{\text{passarinho, cachorro, gato}\}$. Além disso, cada elemento do conjunto é listado uma única vez.

Essa maneira de descrever um conjunto é adequada para conjuntos finitos (possuem um número limitado de elementos) e que possuam poucos elementos. Por outro lado, embora seja impossível listar todos os elementos de um conjunto infinito, para alguns tipos de conjuntos infinitos, poderíamos informar a forma geral indicando os seus primeiros elementos. Por exemplo, para o conjunto A dos números inteiros ímpares, a sua lista é $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$. Embora, isso possa ser utilizado, existe o perigo de que nós não percebamos a forma geral que a pessoa que descreveu o conjunto queria identificar.

PELA PROPRIEDADE CARACTERÍSTICA

Essa forma consiste em enunciar objetivamente a propriedade que caracteriza os elementos do conjunto. Por exemplo, para o conjunto dos números inteiros ímpares, temos:

$$A = \{x \mid x \text{ é um inteiro ímpar, } x > 0\}$$

a qual é lida como “ **A é o conjunto dos elementos x tal que x é um número inteiro ímpar e maior que zero**”. Geralmente, nessa descrição, a letra x é utilizada para designar um elemento qualquer do conjunto, o símbolo $|$ é interpretado como “tal que” e a vírgula significa “e”.

- **Exemplo C.1:** Descreva por lista os conjuntos a seguir.

a) $B = \{x \mid x \text{ é um número inteiro, } 5 \leq x < 9\}$

$$B = \{5, 6, 7, 8\}$$

b) $C = \{x \mid x \text{ é uma estação do ano}\}$

$$C = \{\text{primavera, verão, outono, inverno}\}$$

c) $D = \{x \mid x \text{ é um mês do ano com 28 ou 29 dias}\}$

$$D = \{\text{fevereiro}\}$$

- **Exemplo C.2:** Descreva pela propriedade característica os conjuntos a seguir.

a) $E = \{1, 8, 27, 64, 125\}$

Observando os elementos listados do conjunto E , notamos que se trata dos cubos dos números de 1 a 5. Portanto, $E = \{x \mid x \text{ é um dos cinco primeiros cubos perfeitos}\}$.

b) $F = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$

Primeiro, observe que o conjunto F é um conjunto com infinitos elementos. Segundo, os números listados correspondem aos números primos. Então, $F = \{x \mid x \text{ é um número primo}\}$.

c) $G = \{\text{verde, amarelo, azul, branco}\}$

Note que as cores listadas correspondem às cores da bandeira do Brasil. Assim, $G = \{x \mid x \text{ é cor da bandeira do Brasil}\}$.

C.5 CONJUNTO UNIVERSO E CONJUNTO VAZIO

Em qualquer aplicação da teoria dos conjuntos, os elementos de todos os conjuntos considerados pertencem a algum conjunto maior, o qual é conhecido por *conjunto universo*. Por exemplo, em geometria plana, o conjunto universo compõe-se de todos os pontos do plano e, em estudos de populações humanas, o conjunto universo compõe-se de todas as pessoas do mundo. Nós vamos utilizar o símbolo U para denotar o conjunto universo.

Por outro lado, vamos analisar o conjunto descrito por $A = \{x \mid x \text{ é um número inteiro positivo, } x^4 = 5\}$. Da

matemática, sabemos que não existe nenhum número inteiro que elevado à quarta potência resulte no número 5. Assim, concluímos que o conjunto A não possui nenhum elemento, visto que nenhum número inteiro satisfaz a propriedade requerida. O conjunto que não contém elementos é chamado de *conjunto vazio* e denotado por $\emptyset$.

C.6 RELAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

Para $A = \{a, e, u\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$, observamos que todo o elemento pertencente a A , também pertence a B . Nesses casos, dizemos que A é um *subconjunto* de B . Daí, temos que A é um subconjunto de B se $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$, que se lê “para todo x , se x pertence a A , implica que x pertence a B ”.

Se o conjunto A é um subconjunto do conjunto B , escrevemos $A \subseteq B$. Porém, se $A \subseteq B$, mas $A \neq B$ (existe, pelo menos, um elemento em B que não pertence a A), então A é dito um *subconjunto próprio* de B , e escrevemos $A \subset B$.

- **Exemplo C.3:** Considere os conjuntos $A = \{1, 4, 9, 16\}$, $B = \{4, 9\}$ e $C = \{4, 9, 16, 25\}$. As seguintes proposições são todas verdadeiras.

A proposição “d” significa que o conjunto A não é um subconjunto do conjunto C .

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| a) $B \subseteq C$ | e) $16 \in C$ |
| b) $B \subseteq A$ | f) $\{4, 9\} \subseteq B$ |
| c) $B \subset A$ | g) $\{4\} \subset A$ |
| d) $A \not\subset C$ | h) $9 \in A$ |

- **Exemplo C.4:** Considere os conjuntos $A = \{x \mid x \text{ é um inteiro positivo, } x \geq 8\}$, $B = \{11, 13, 15, 17, 19\}$ e $C = \{x \mid x \text{ é um inteiro positivo, } x \leq 22\}$. Determine se cada proposição a seguir é verdadeira ou falsa.

- | |
|--|
| a) $B \subseteq C$
Verdadeira. |
| b) $B \subset A$
Verdadeira. |
| c) $A \subseteq C$
Falsa. Observe, por exemplo, que os elementos 23 e 24 pertencem a A e não pertencem a C . |
| d) $\{11, 12, 13\} \subseteq A$
Verdadeira. |
| e) $6 \in A$
Falsa. Somente os números maiores ou iguais a 8 fazem parte do conjunto A . |
| f) $\{15, 17, 19, 21, 23\} \subseteq C$
Falsa. Somente os números menores ou iguais a 22 fazem parte do conjunto C . Assim, o elemento 23 não pertence ao conjunto C . |

C.7 CONJUNTOS DE CONJUNTOS

Para um dado conjunto A , podemos formar um novo conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A . Esse novo conjunto é chamado de conjunto das partes de A e denotado por $\wp(A)$.

- **Exemplo C.5:** Seja o conjunto $B = \{1, 2, 3\}$. Nesse caso, temos que $\wp(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Do Exemplo C.5, podemos tirar algumas conclusões importantes. A primeira é a de que o conjunto das partes de um conjunto sempre conterá o conjunto vazio e o próprio conjunto.

A segunda conclusão está relacionada com a quantidade de elementos que compõem o conjunto das partes. Observe que o conjunto B do Exemplo C.5 possui 3 elementos e que $\wp(B)$ possui 8. Assim, essa observação pode ser generalizada e, para um conjunto S com n elementos, temos que o conjunto das partes $\wp(S)$ terá 2^n elementos.

C.8 OPERAÇÕES BINÁRIAS E UNÁRIAS

Inicialmente, vamos definir o termo *par ordenado*. Um par ordenado consiste de dois elementos quaisquer de um conjunto listados entre parênteses. Assim, um par ordenado é denotado por (x, y) , onde x é a primeira componente e y é a segunda. A ordem das componentes é muito importante em um par ordenado. Assim, os conjuntos $\{5, 6\}$ e $\{6, 5\}$ são iguais, mas os pares ordenados $(5, 6)$ e $(6, 5)$ são diferentes. Nós já trabalhamos intuitivamente com essa ideia de pares ordenados como coordenadas para se localizar um ponto no plano. Por exemplo, a localização do ponto $(5, 6)$ no plano cartesiano é completamente diferente da localização do ponto $(6, 5)$ no mesmo plano.

Para dois pares ordenados (x, y) e (u, v) , esses serão iguais se, e somente se, $x = u$ e $y = v$.

- **Exemplo C.6:** Dado o par ordenado $(3x - y, x + 2y) = (10, 8)$, calcule os valores de x e y . Para que haja a igualdade entre os pares ordenados, lembre que as suas respectivas coordenadas devem ser iguais. Assim, temos que:

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

Observe que temos um sistema linear com duas incógnitas e duas equações, cuja solução é $x = 4$ e $y = 2$.

Definição de operação binária

Uma operação em um conjunto S é uma operação binária, denotada genericamente por $\circ$, se, para todo par ordenado (x, y) de elementos de S , $x \circ y$ existe, é única e pertence a S .

As condições de que $x \circ y$ existe e é única equivale a dizer que a operação $x \circ y$ está bem definida. A condição de que $x \circ y$ sempre pertence a S é interpretada dizendo-se que S é fechado em relação à operação $\circ$.

Como exemplos de operações binárias, podemos citar as operações de adição, subtração e multiplicação no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Assim, ao efetuarmos a operação de adição entre dois números inteiros x e y , $x + y$ existe, é único e pertence ao conjunto $\mathbb{Z}$.

Por outro lado, a operação de divisão não é uma operação binária em $\mathbb{Z}$, pois $x \div 0$ não existe. Da mesma forma, a operação de subtração não é uma operação binária no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, pois $\mathbb{N}$ não é fechado em relação à subtração ($1 - 2 \notin \mathbb{N}$).

Considere a operação $x \circ y$ definida em N por:

$$x \circ y = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 3 \\ 0, & \text{se } x \leq 3 \end{cases}$$

Observe que, pela primeira parte da definição de $x \circ y$, $3 \circ 1 = 1$, porém, pela segunda parte, $3 \circ 1 = 0$. Assim, a operação $\circ$ não está bem definida em N e, por conseguinte, a operação $\circ$ não é uma operação binária.

Definição de operação unária

Uma operação em um conjunto S é uma operação unária, denotada genericamente por $\#$, quando é verdade que $x^\#$ é bem definida para todo x em S e que S é fechado em relação a $\#$. Em outras palavras, qualquer que seja $x \in S$, $x^\#$ existe, é único e pertence a S . Caso uma dessas condições falhe, não teremos uma operação unária.

Por exemplo, considere a operação unária definida por $x^\# = -x$, de modo que $x^\#$ é o negativo de x . A operação $\#$ é uma operação unária no conjunto Z , entretanto, não o é em N , pois N não é fechado em relação a $\#$.

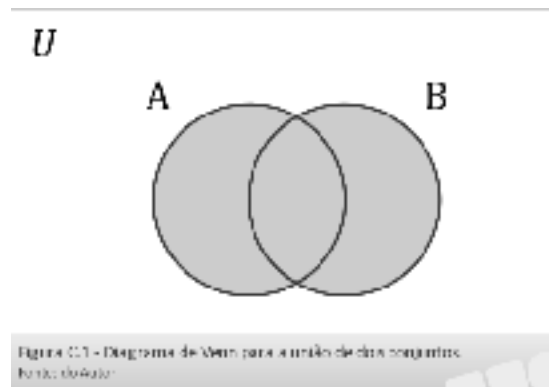
- **Exemplo C.7:** Quais das expressões a seguir não definem operações binárias nem unárias nos conjuntos dados? Por quê?
 - a) $x \circ y = x \div y$; S = conjunto de todos os números inteiros positivos.
Não define uma operação binária, pois S não é fechado em relação à divisão.
 - b) $x \circ y = x \div y$; S = conjunto de todos os números reais positivos.
É uma operação binária.
 - c) $x \circ y = x^y$; S = conjunto dos números reais.
Não define uma operação binária, pois 0^0 não está definido.
 - d) $x \circ y = \text{máximo entre } x \text{ e } y$; S = conjunto dos números naturais.
Define uma operação binária.
 - e) $x^\# = \sqrt{x}$; S = conjunto de todos os números reais positivos.
Define uma operação binária.
 - f) $x^\# = \text{solução da equação } (x^\#)^2 = x$; S = conjunto dos números complexos.
Não define uma operação unária, pois $x^\#$ não é único para $x = 4$, por exemplo, $2^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$.

C.9 OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

Para as definições a seguir, considere que A e B sejam dois subconjuntos de um determinado conjunto universo U .

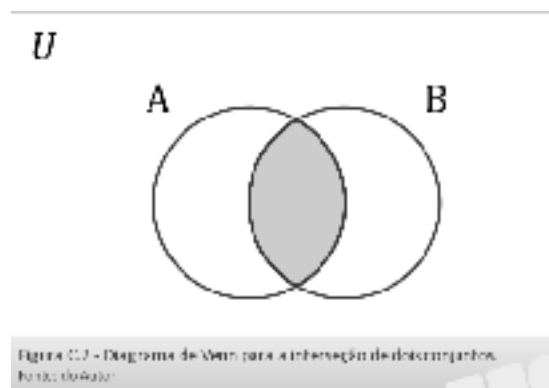
UNIÃO DE CONJUNTOS

A união dos conjuntos A e B , denotada por $A \cup B$, é o conjunto $\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$. A Figura C.1 ilustra graficamente a união dos conjuntos A e B . Essa visualização é conhecida como *diagrama de Venn*. A área hachurada corresponde à união dos conjuntos A e B .



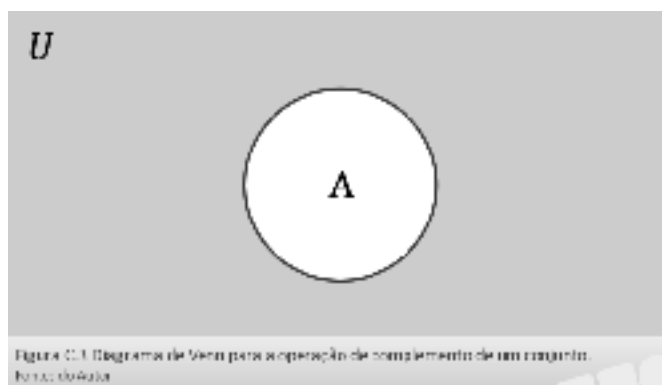
INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS

A interseção dos conjuntos A e B , denotada por $A \cap B$, é o conjunto $\{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$. A Figura C.2 é o *diagrama de Venn* para a interseção dos conjuntos A e B . A área hachurada corresponde à interseção dos conjuntos.



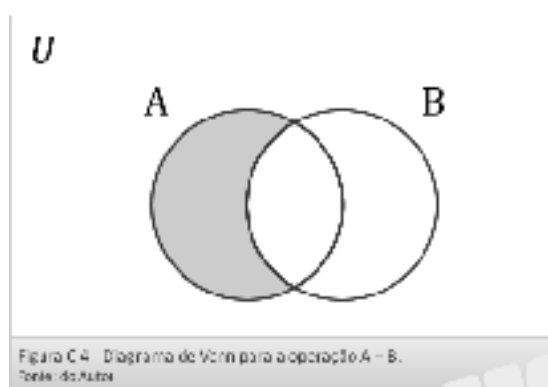
COMPLEMENTO DE UM CONJUNTO

O complemento de um conjunto A , denotado por A' , é o conjunto $\{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}$. A figura C.3 ilustra o complemento do conjunto A através do diagrama de Venn. A área hachurada corresponde ao complemento do conjunto A .



DIFERENÇA ENTRE CONJUNTOS

A diferença entre os conjuntos A e B , denotada por $A - B$, é o conjunto $\{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$. A Figura C.4 mostra o diagrama de Venn para a operação de diferença entre conjuntos. A área hachurada corresponde a $A - B$.



CONJUNTOS DISJUNTOS

Dois conjuntos A e B são ditos disjuntos se $A \cap B = \emptyset$. Assim, temos que $A - B$ e $B - A$ são conjuntos disjuntos.

PRODUTO CARTESIANO

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B , denotado por $A \times B$, é o conjunto $\{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$. Assim, o produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os pares ordenados com primeira componente em A e a segunda em B .

- Exemplo C.8:** Sejam os subconjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ do conjunto universo $U = \text{números inteiros positivos}$. Para, esses conjuntos, temos que:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A \cap B = \{3, 5\}$$

$$A' = \text{conjunto dos números inteiros positivos com exceção dos números 1, 3, 5 e 7}$$

$$B' = \text{conjunto dos números inteiros positivos com exceção dos números 2, 3, 4, 5, 6 e 8}$$

$$A - B = \{1, 7\}$$

$$B - A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 8), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 8), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 8), (7, 2), (7, 3), (7, 4), (7, 5), (7, 6), (7, 8)\}$$

$$B \times A = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (5, 7), (6, 1), (6, 3), (6, 5), (6, 7), (8, 1), (8, 3), (8, 5), (8, 7)\}$$

C.10 IDENTIDADES ENVOLVENDO CONJUNTOS

Há várias igualdades entre conjuntos envolvendo as operações de união, interseção, diferença e complementação que são válidas para quaisquer subconjuntos de um dado conjunto S . Essas igualdades são conhecidas como *identidades*.

A seguir, serão listadas as identidades básicas envolvendo conjuntos.

Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associatividade: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

Distributividade: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Existência de elemento neutro: $A \cup \emptyset = A$

$$A \cap S = A$$

Propriedades do complemento: $A \cup A' = S$

$$A \cap A' = \emptyset$$

- **Exemplo C.9:** Usando as identidades básicas entre conjuntos, mostre que a igualdade $[C \cap (A \cup B)] \cup [(A \cup B) \cap C'] = A \cup B$ é verdadeira.

Vamos começar pelo lado esquerdo da igualdade. Primeiramente, utilizando a identidade da comutatividade, obtemos

$$[(A \cup B) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap C']$$

Agora, usando a propriedade da distributividade, obtemos

$$(A \cup B) \cap (C \cup C')$$

Recordando a propriedade da operação de complemento, obtemos

$$(A \cup B) \cap S$$

E, finalmente, pela propriedade da existência de elemento neutro, chegamos a

$$A \cup B$$

Prova concluída.

C.11 CONJUNTOS CONTÁVEIS E NÃO-CONTÁVEIS

Em um conjunto finito A , sempre podemos designar um elemento como sendo o primeiro, a_1 , um outro como sendo o segundo, a_2 , e assim por diante. Se existem n elementos no conjunto, então eles podem ser listados na ordem $a_1, a_2, \dots, a_n$. Essa lista representa todo o conjunto.

O número de elementos em um conjunto finito é a *cardinalidade* do conjunto.

No caso de conjuntos infinitos, podemos ainda, em alguns casos, selecionar um primeiro elemento a_1 , um segundo, a_2 , e assim por diante, de modo que a lista $a_1, a_2, a_3, \dots$, representa todos os elementos do conjunto. Tal conjunto infinito é dito *enumerável*.

Os conjuntos finitos e os conjuntos enumeráveis são conjuntos contáveis, pois podemos contar, ou enumerar, todos os seus elementos.

Atenção

Ser um conjunto contável não significa que somos capazes de dizer qual o número total de elementos no conjunto (sua cardinalidade); significa que podemos identificar quem é o primeiro elemento, o segundo, e assim por diante.

Um exemplo de conjunto enumerável é o conjunto dos números naturais N . Para provar que o conjunto N é enumerável, basta que mostremos uma forma de listar os seus componentes, ou seja,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Por outro lado, o conjunto dos números reais R é não-enumerável. Podemos observar que entre quaisquer dois números reais sempre existirá outro. Isso impossibilita a listagem dos seus elementos, tornando-o um conjunto não-enumerável.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Descreva cada um dos conjuntos listando os seus elementos.

- $\{x | x \in \mathbb{N}, x^2 < 25\}$
- $\{x | x \in \mathbb{N}, x \text{ é par}, -2 < x < 11\}$
- $\{x | x \in \mathbb{R}, x^2 = -1\}$
- $\{x | x \text{ é um dos estados da Região Sul do Brasil}\}$
- $\{x | x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 4\}$

2. Descreva os conjuntos na forma de propriedade característica.

- $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
- $\{\text{Melchior, Gaspar, Balthazar}\}$
- $\{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \dots\}$

3. Dados os conjuntos $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 < x < 50\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R}, 1 < x < 50\}$ e $C = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| \geq 25\}$. Quais afirmações são verdadeiras? Para as que não forem, por quê?

- $A \subseteq B$
- $17 \in A$
- $A \subseteq C$
- $-40 \in C$
- $\{0, 1, 2\} \subseteq A$
- $\{x | x \in \mathbb{Z}, x^2 > 625\}$

4. Sejam $R = \{1, 3, \pi, 4, 9, 10\}$, $S = \{\{1\}, 3, 9, 10\}$, $T = \{1, 3, \pi\}$ e $U = \{\{1, 3, \pi\}, 1\}$. Quais afirmações são verdadeiras? Para as que não forem, por quê?

- $S \subseteq R$
- $1 \in R$
- $1 \in S$
- $T \subset R$
- $T \subseteq U$
- $T \in U$
- $T \subseteq R$

5. Encontre $\wp(S)$ se $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Quantos elementos $\wp(S)$ possui?

6. O que se pode afirmar sobre A se $\wp(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$?

7. Quais das expressões definem operações binárias ou unárias nos conjuntos dados? Para as que não definem, por quê?

- $x \circ y = x + 1; S = \mathbb{N}$
- $x \circ y = x + y - 1; S = \mathbb{N}$
- $$x \circ y = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ x & \text{se } x \text{ é par} \end{cases} \quad S = \mathbb{Z}$$
- $x^\# = \ln x; S = \mathbb{R}$
- $x^\# = x^2; S = \mathbb{Z}$

8. Sejam $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, e, f\}$ e $C = \{a, d, e, g\}$ subconjuntos de $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Determine :

- a. $B \cap C$
- b. $A \cup C$
- c. A'
- d. $A \cap B \cap C$
- e. $B - C$
- f. $(A \cup B)'$
- g. $A \times B$
- h. $(A \cup C) \cap B'$

9. Sejam $P = \{2, 4, 5, 6, 8\}$, $R = \{1, 6, 8, 10\}$ e $T = \{x | x \in \mathbb{Z}, 2x < 5\}$ subconjuntos de $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
Determine

- a. $A \cup B$
- b. $A \cap B$
- c. $A \cap C$
- d. $B \cup C$
- e. $A - B$
- f. $(B - A)' \cap (A - B)$
- g. $B \times C$

10. A, B e C são subconjuntos de um conjunto S. Prove as identidades a seguir.

- a. $A \cap (B \cup A') = B \cap A$
- b. $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

Tics

D

RELAÇÕES

Unidade D
Fundamentos Matemáticos
da Computação

UNIDADE

D

RELAÇÕES

D.1 INTRODUÇÃO

Nós estamos familiarizados com muitas relações que são utilizadas em matemática e ciência da computação. Por exemplo, “menor que”, “maior que”, “é ortogonal a”, “é um subconjunto de”, “pertence a”, ...

De certa forma, essas relações consideram a existência de uma conexão entre pares de objetos que são comparados em uma ordem predefinida. Formalmente, nós definimos uma relação em termos desses “pares ordenados”.

Na teoria da ciência da computação, existem três tipos de relação que são muito importantes:

- relações binárias;
- relações de equivalência;
- funções.

As duas primeiras serão estudadas e discutidas nessa unidade. As relações funcionais serão apresentadas na Unidade E.

Como apresentado anteriormente, as relações são definidas em termos de pares ordenados (a, b) de elementos, onde a é o primeiro elemento e b , o segundo. Não esqueçamos, da Unidade C, que

$$(a, b) = (c, d)$$

se, e **somente** se, $a = c$ e $b = d$.

D.2 RELAÇÕES BINÁRIAS

Definição

Dado um conjunto S , uma relação binária em S é um subconjunto de $S \times S$ (um conjunto de pares ordenados de S).

Vamos recordar a Unidade C. O produto cartesiano de um conjunto S com ele mesmo, $S \times S$, é o conjunto de todos os pares ordenados de elementos de S . Por exemplo, se $S = \{a, b, c\}$, então

$$S \times S = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

Se estivéssemos interessados na relação de igualdade, então (a, a) , (b, b) e (c, c) seriam os elementos de $S \times S$ escolhidos, ou seja, os únicos pares ordenados que satisfazem a relação desejada (componentes iguais). Podemos afirmar que os pares ordenados (x, y) são aqueles que satisfazem $x = y$.

Assim, genericamente, podemos utilizar a notação $x \rho y$ com o significado de que o par ordenado (x, y) satisfaz a relação ρ . A relação ρ pode ser descrita em termos de palavras ou listando-se os pares ordenados que a satisfazem.

Matematicamente, temos que

$$x \rho y \leftrightarrow (x, y) \in \rho$$

Em geral, uma relação binária é definida por uma descrição. Essa descrição caracteriza os elementos pertencentes à relação, ou seja, um predicado binário que é satisfeito por determinados pares ordenados.

Nos exemplos a seguir, considere $S = \{1, 2\}$. Então, $S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

- **Exemplo D.1:** Seja a relação ρ em S dada por $x \rho y \leftrightarrow x + y$ é par. Então, $(1, 1) \in \rho$ e $(2, 2) \in \rho$.
- **Exemplo D.2:** A relação ρ é definida em S por $\rho = \{(1, 2), (2, 2)\}$, então $1 \rho 2$ e $2 \rho 2$ são verdadeiras, porém, $1 \rho 1$ não o é.

RELAÇÕES ENTRE CONJUNTOS DIFERENTES

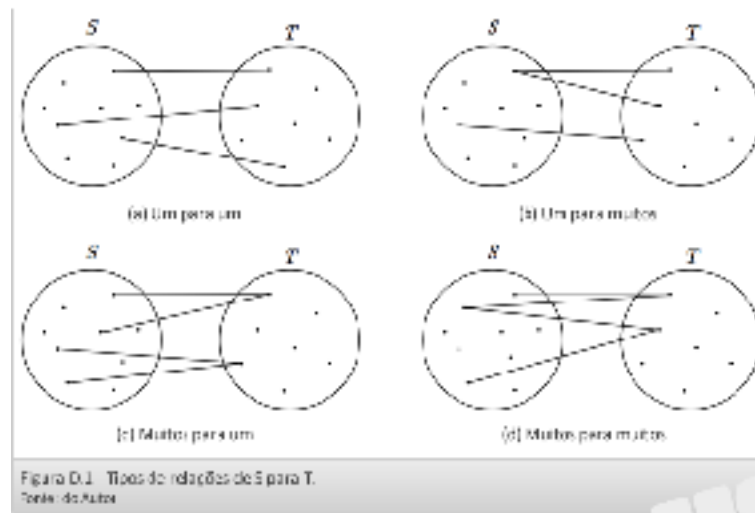
Definição

Dados dois conjuntos S e T , uma relação binária de S para T é um subconjunto de $S \times T$.

- **Exemplo D.3:** Sejam $S = \{1, 2, 3\}$ e $T = \{7, 8, 9\}$. O conjunto $\{(1, 7), (2, 8), (3, 9)\}$ é formado por elementos de $S \times T$, logo é uma relação binária de S para T .
- **Exemplo D.4:** Para as relações binárias ρ a seguir, quais entre os pares ordenados listados pertencem a relação?
 - $x \rho y \leftrightarrow y = x + 1$; $(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)$
 $(1, 2) \in \rho$ e $(2, 3) \in \rho$
 - $x \rho y \leftrightarrow y$ é múltiplo de x ; $(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)$
 $(1, 2) \in \rho, (1, 3) \in \rho$ e $(2, 4) \in \rho$
 - $x \rho y \leftrightarrow y > x^2$; $(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)$
 $(1, 2) \in \rho$ e $(1, 3) \in \rho$

Se ρ é uma relação binária em S , então ρ consiste em um conjunto de pares ordenados (x, y) . Dada uma primeira componente x , ou uma segunda componente y , podem ser formados vários pares pertencentes à relação.

A relação é um para um se cada primeira componente e cada segunda componente aparece uma única vez na relação. A relação é um para muitos se alguma primeira componente aparece mais de uma vez. A relação é dita muitos para um se alguma segunda componente aparece mais de uma vez. E, a relação é muitos para muitos se pelo menos uma primeira componente aparece em mais de um par e pelo menos uma segunda componente aparece em mais de um par. A Figura D.1 ilustra esses tipos de relação do ponto de vista gráfico. Observe que nem todos os valores em S precisam ser componentes de algum par ordenado em ρ .



PROPRIEDADES DE RELAÇÕES

Definição

Uma relação binária ρ em um conjunto S é:

- **reflexiva:** $(\forall x) (x \in S \rightarrow (x, x) \in \rho)$
 - **simétrica:** $(\forall x) (\forall y) (x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \rightarrow (y, x) \in \rho)$
 - **transitiva:** $(\forall x) (\forall y) (\forall z) (x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \rightarrow (x, z) \in \rho)$
- **Exemplo D.5:** Considere a relação de igualdade, $x \rho y \leftrightarrow x = y$, em um conjunto S . Ela é reflexiva, pois, para qualquer $x \in S$, $x = x$, ou seja, $(x, x) \in \rho$.
- Ela é simétrica, pois, para quaisquer $x, y \in S$, se $x = y$, então $y = x$, ou seja, $(x, y) \in \rho \rightarrow (y, x) \in \rho$.
- Ela também é transitiva, pois, para quaisquer $x, y, z \in S$, se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$, ou seja, $[(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho] \rightarrow (x, z) \in \rho$.
- **Exemplo D.6:** Considere a relação “ $\leq$ ” no conjunto $\mathbb{N}$. Essa relação é reflexiva porque, para qualquer inteiro não-negativo x , $x \leq x$. Ela também é transitiva porque, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.
- Porém, ela não é simétrica porque $3 \leq 4$ não implica em que $4 \leq 3$. Em verdade, para quaisquer x e $y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$. Essa propriedade é chamada de anti-simétrica. Matematicamente, podemos escrever que $(\forall x) (\forall y) (x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \rightarrow x = y)$.
- **Exemplo D.7:** Considere o conjunto $S = \{a, b, c, d\}$.
- Se uma relação em S é reflexiva, quais pares ordenados pertencem à relação?
 $(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)$
 - Se uma relação em S é simétrica e se $(a, b) \in \rho$, que outros pares ordenados pertencem a ρ ?
 (b, a)
 - Se uma relação em S é anti-simétrica e se $(a, b) \in \rho$ e $(b, a) \in \rho$, o que é necessário acontecer?
 $a = b$

Observação: as propriedades de simetria e anti-simetria para relações binárias não são o oposto uma da outra, como poderia parecer pelos seus nomes. Anti-simétrica não significa “não-simétrica”.

Uma relação é não-simétrica se algum (x, y) pertencer à relação e (y, x) não. Portanto, as relações podem ser simétricas e anti-simétricas, anti-simétricas e não-simétricas, podem ser simétricas e anti-simétricas, ou ainda podem não ser nem simétricas nem anti-simétricas. Por exemplo, a relação de igualdade em um conjunto S é simultaneamente simétrica e anti-simétrica. Por outro lado, a relação $\rho = \{(a, e), (e, a), (a, i)\}$ no conjunto $S = \{a, e, i\}$ não é nem simétrica, (a, i) pertence à relação, porém (i, a) não; nem anti-simétrica, (a, e) e (e, a) pertencem, mas $a \neq e$.

- **Exemplo D.8:** Analise as relações binárias no conjunto S e determine se são reflexivas, simétricas, anti-simétricas ou transitivas.
 - a) $S = \mathbb{N}$; $x \rho y \leftrightarrow x + y$ é par.
 ρ é reflexiva, simétrica e transitiva.
 - b) $S = \mathbb{Z}^+$ (conjunto dos números inteiros positivos); $x \rho y \leftrightarrow x$ divide y .
 ρ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.
 - c) $S =$ conjunto de todas as retas no plano; $x \rho y \leftrightarrow x$ é paralela a y ou x coincide com y .
 ρ é reflexiva, simétrica e transitiva.
 - d) $S = \mathbb{N}$; $x \rho y \leftrightarrow x = y^2$.
 ρ é anti-simétrica.
 - e) $S = \{0, 1\}$; $x \rho y \leftrightarrow x = y^2$.
 ρ é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva.
 - f) $S = \{x \mid x \text{ é uma pessoa que mora em Passo Fundo}\}$; $x \rho y \leftrightarrow x$ é mais velho do que y .
 ρ é anti-simétrica e transitiva.
 - g) $S = \{x \mid x \text{ é um aluno em sua turma}\}$; $x \rho y \leftrightarrow x$ senta-se na mesma fila que y .
 ρ é reflexiva, simétrica e transitiva.
 - h) $S = \{a, b, c\}$; $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$.
 ρ é reflexiva, simétrica e transitiva.

D.3 ORDENS PARCIAIS

Definição

Uma relação binária em um conjunto S que seja reflexiva, anti-simétrica e transitiva é denominada de ordem parcial em S .

Para ilustrar a definição anterior, as relações a seguir são ordens parciais.

- a) Em $\mathbb{N}$; $x \rho y \leftrightarrow x \leq y$
- b) Em $\wp(\mathbb{N})$; $A \rho B \leftrightarrow A \subseteq B$
- c) Em $\mathbb{Z}^+$; $x \rho y \leftrightarrow x$ divide y
- d) Em $\{0, 1\}$; $x \rho y \leftrightarrow x = y^2$

Se ρ é uma ordem parcial em S , então o par ordenado (S, ρ) é denominado *conjunto parcialmente ordenado*. Utilizaremos a notação $(S, \leq)$ para um conjunto parcialmente ordenado qualquer.

Seja $(S, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se $x \leq y$, então ou $x = y$ ou $x \neq y$. Se $x \leq y$ mas $x \neq y$, escrevemos $x < y$ e dizemos que x é um predecessor de y ou que y é um sucessor de x . Um dado y pode ter muitos predecessores, mas se $x < y$ e se não existe nenhum z com $x < z < y$, então x é um *predecessor imediato* de y .

• **Exemplo D.9:** Considere a relação “ x divide y ” em $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$.

a) Escreva os pares ordenados (x, y) pertencentes à relação.

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (1, 12), (1, 18), (2, 2), (2, 6), (2, 12), (2, 18), (3, 3), (3, 6), (3, 12), (3, 18), (6, 6), (6, 12), (6, 18), (12, 12), (18, 18)$.

b) Escreva os predecessores de 6.

1, 2, 3

c) Escreva os predecessores imediatos de 6.

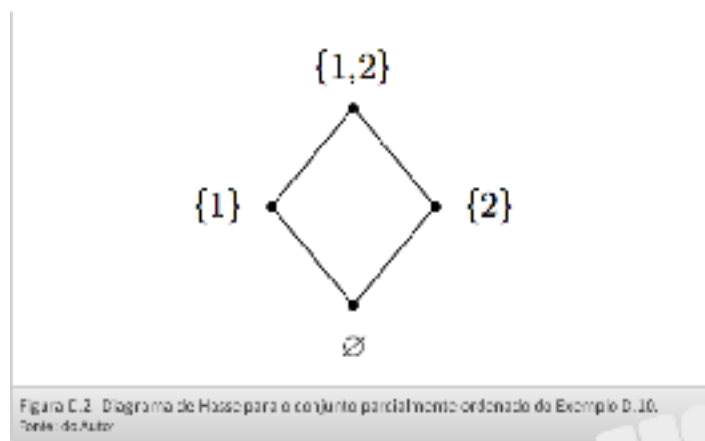
2, 3

Se S for finito, podemos representar visualmente um conjunto parcialmente ordenado $(S, \leq)$ por um *diagrama de Hasse*. Cada elemento de S é representado por um ponto, denominado nó ou vértice do diagrama. Se x é um predecessor imediato de y , o nó que representa y é colocado acima do nó que representa x e os dois nós são ligados por um segmento de reta.

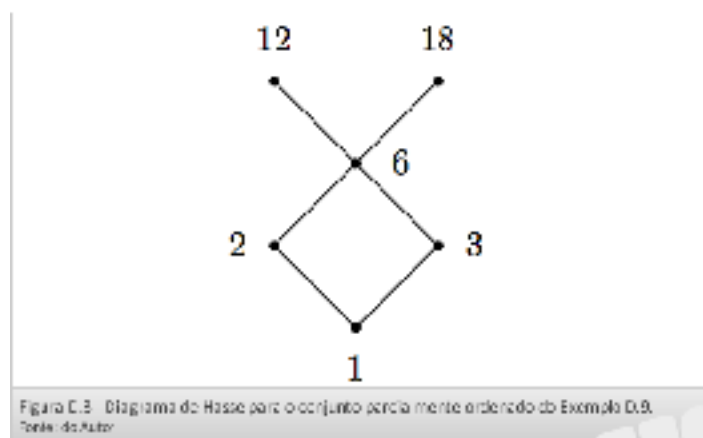
• **Exemplo D.10:** considere $\wp(\{1, 2\})$ com a relação de inclusão de conjuntos. Esse é um conjunto parcialmente ordenado. Os elementos de $\wp(\{1, 2\})$ são $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{1, 2\}$. A relação binária $\subseteq$ consiste nos seguintes pares ordenados:

$(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{1, 2\}), (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{1, 2\}), (\{1, 2\}, \{1, 2\})$

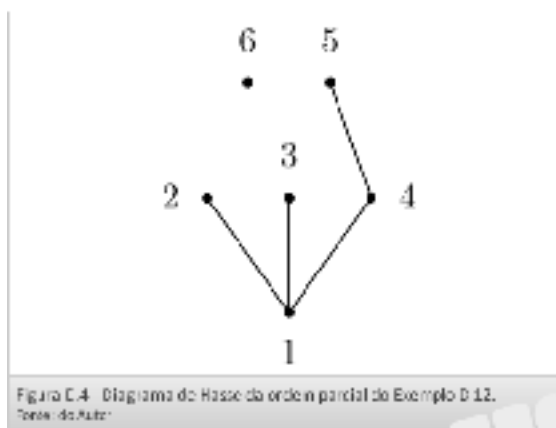
O diagrama de Hasse desse conjunto parcialmente ordenado está mostrado na Figura D.2. É importante observar que embora $\emptyset$ não seja um predecessor imediato de $\{1, 2\}$, ele é um predecessor de $\{1, 2\}$.



• **Exemplo D.11:** Construa o diagrama de Hasse para o conjunto parcialmente ordenado do Exemplo D.9.



O diagrama de Hasse de um conjunto parcialmente ordenado contém todas as informações sobre a ordem parcial. Assim, podemos obter o conjunto de pares ordenados a partir do diagrama. Os segmentos de reta indicam os predecessores e sucessores. Podemos completar o resto utilizando as propriedades da reflexividade e da transitividade. **Exemplo D.12:** Determine o conjunto de pares ordenados da ordem parcial dada pelo seu diagrama de Hasse (Figura D.4).



O conjunto dos pares ordenados da ordem parcial são

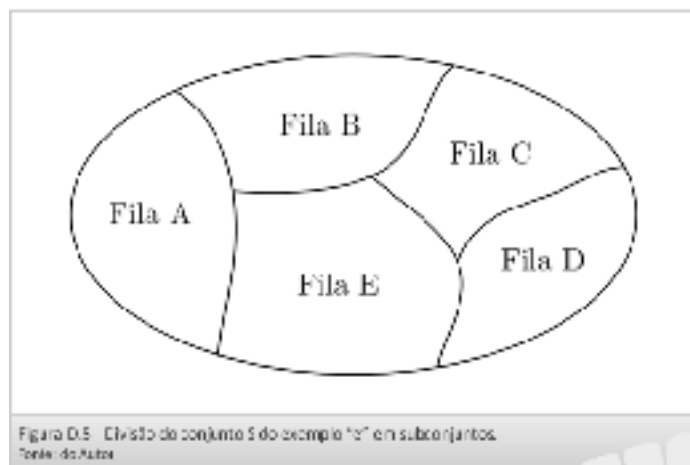
$$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (4, 5)\}$$

D.4 RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Definição: uma relação binária em um conjunto S que seja reflexiva, simétrica e transitiva é denominada de relação de equivalência em S . Exemplos de relações de equivalência:

- Em qualquer conjunto S , $x \rho y \leftrightarrow x = y$.
- Em $\mathbb{N}$, $x \rho y \leftrightarrow x + y$ é par.
- No conjunto de todas as retas no plano, $x \rho y \leftrightarrow x$ é paralela ou coincide com y .
- Em $\{0, 1\}$, $x \rho y \leftrightarrow x = y^2$.
- Em $\{x | x \text{ é um aluno em sua turma}\}$, $x \rho y \leftrightarrow x$ senta-se na mesma fila que y .
- Em $\{a, b, c\}$, $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$.

Iremos abordar agora uma característica importante das relações de equivalência. Considere o exemplo “e” acima. Ao agruparmos todos os alunos no conjunto S que estão relacionados entre si, chegamos à Figura D.5. Nós dividimos o conjunto S em subconjuntos de modo que todos na turma pertencem a um, e apenas um, subconjunto.



Definição

Uma partição de um conjunto S é uma decomposição de S em subconjuntos não vazios tais que todo o elemento de S pertence a um, e apenas um, desses subconjuntos. A cada um desses subconjuntos chamamos elementos da partição.

Assim, qualquer relação de equivalência divide o conjunto onde está definida em uma partição. Os subconjuntos que compõem a partição são formados agrupando-se os elementos relacionados.

Se ρ é uma relação de equivalência em um conjunto S e se $x \in S$, denotamos por $[x]$ o conjunto de todos os elementos relacionados a x em S e esse conjunto é chamado de classe de equivalência de x . Portanto,

$$[x] = \{y \mid y \in S \wedge x \rho y\}$$

No caso do exemplo "e" anterior, suponha que os alunos Antônio, Carla, José e Bianca sentem na mesma fila. Então, $[\text{Antônio}] = \{\text{Carla}, \text{José}, \text{Bianca}\}$. Temos ainda que $[\text{Antônio}] = [\text{Carla}] = [\text{José}] = [\text{Bianca}]$. Essas não são classes distintas, mas a mesma classe com diferentes nomes. Uma classe de equivalência pode usar o nome de qualquer um dos seus elementos.

Teorema

Uma relação de equivalência ρ em um conjunto S define uma partição de S e uma partição de S define uma relação de equivalência em S .

- **Exemplo D.13:** vamos considerar a relação de equivalência em $\mathbb{N}$, $x \rho y \leftrightarrow x + y$ é par. Essa relação divide o conjunto $\mathbb{N}$ em duas classes de equivalência. Se x é um número par, então, para todo o número par y , $x + y$ é par e $y \in [x]$. Todos os números pares formam uma classe de equivalência. Por outro lado, se x é ímpar, então, para todo o número ímpar y , $x + y$ é par e $y \in [x]$. Todos os números ímpares formam a segunda classe de equivalência. A partição pode ser representada como mostrado na Figura D.6.



Observe que uma classe de equivalência pode ter mais de um nome. No Exemplo D.13, $[2] = [100] = [1048]$ e $[1] = [277] = [2359]$.

- **Exemplo D.14:** No conjunto $\{a, b, c\}$, $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$, descreva as classes de equivalência.

$$[a] = [b] = \{a, b\} \text{ e } [c] = \{c\}$$

A Tabela D.1 apresenta um resumo sobre as características importantes de ordens parciais e de relações de equivalência.

Tipo de relação binária	Reflexiva	Simétrica	Anti-simétrica	Transitiva	Característica importante
Ordem parcial	Sim	Não	Sim	Sim	Predecessor e sucessor
Relação de equivalência	Sim	Sim	Não	Sim	Determina uma partição

Tabela D.1 Características importantes das ordens parciais e das relações de equivalência.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Para as relações binárias ρ a seguir, definidas em $\mathbb{N}$, determine quais pares ordenados pertencem a ρ .

- a. $x \rho y \leftrightarrow x + y < 6$; $(1,1), (1,4), (1,5), (2,3), (3,2), (3,3)$
- b. $x \rho y \leftrightarrow x = y + 1$; $(0,1), (3,2), (3,3), (4,3), (5,4), (5,2)$
- c. $x \rho y \leftrightarrow x$ é um cubo perfeito; $(1,1), (1,4), (2,8), (2,9), (3,9), (3,27)$

2. Quais dos pares ordenados satisfazem a relação ρ ?

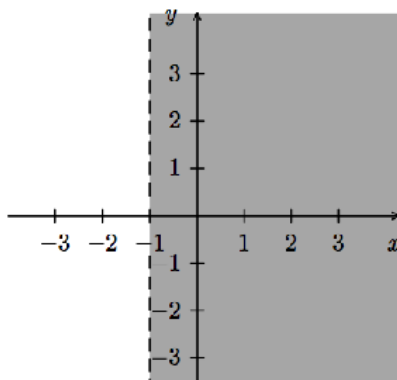
- a. ρ é uma relação binária em $\mathbb{Z}$, $x \rho y \leftrightarrow x = -y$; $(1, -1), (2, 2), (-3, 3), (-4, -4)$
- b. ρ é uma relação binária em $\mathbb{N}$, $x \rho y \leftrightarrow x$ é primo; $(19, 7), (21, 4), (33, 13), (41, 16)$
- c. ρ é uma relação binária em $\mathbb{Q}$, $x \rho y \leftrightarrow x \leq 1/y$; $(1, 2), (-3, -5), (-4, 1/2), (1/2, 1/4)$

3. Para as relações binárias em $\mathbb{R}$, desenhe uma figura que mostre a região do plano que a descreve.

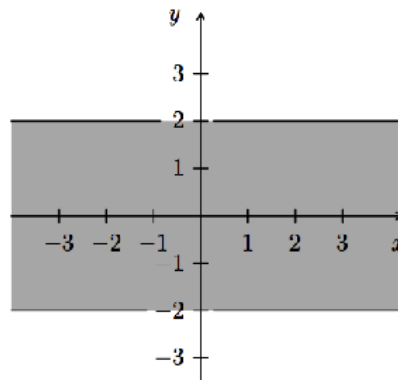
- a. $x \rho y \leftrightarrow x \leq 2$
- b. $x \rho y \leftrightarrow x = y - 1$
- c. $x \rho y \leftrightarrow x \geq y$

4. Para as figuras a seguir, escreva a relação binária que descreve a área sombreada.

a)



b)



5. Determine quais das relações é um para um, um para muitos, muitos para um ou muitos para muitos.

- $S = \mathbb{N}$, $\rho = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,3), (4,3)\}$
- $S = \mathbb{N}$, $\rho = \{(9, 7), (6, 5), (3, 6), (8, 5)\}$
- $S = \mathbb{N}$, $\rho = \{(12,5), (8,4), (6,3), (7,12)\}$
- $S = \mathbb{N}$, $\rho = \{(2, 7), (8, 4), (2, 5), (7, 6), (10, 1)\}$
- $S = \mathbb{N}$, $x \rho y \leftrightarrow x = y+1$
- $S =$ conjunto de todas as mulheres em Passo Fundo, $x \rho y \leftrightarrow x$ é filha de y
- $S = \mathbb{R}$, $x \rho y \leftrightarrow x = 1$

6. Seja $S = \{0, 1, 2, 4, 6\}$. Identifique se as relações binárias em S são reflexivas, simétricas, anti-simétricas ou transitivas.

- $\rho = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 6)\}$
- $\rho = \{(0, 1), (1, 0), (2, 4), (4, 2), (4, 6), (6, 4)\}$
- $\rho = \{(0, 1), (1, 2), (0, 2), (2, 0), (2, 1), (1, 0), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$
- $\rho = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (4, 6), (6, 4)\}$

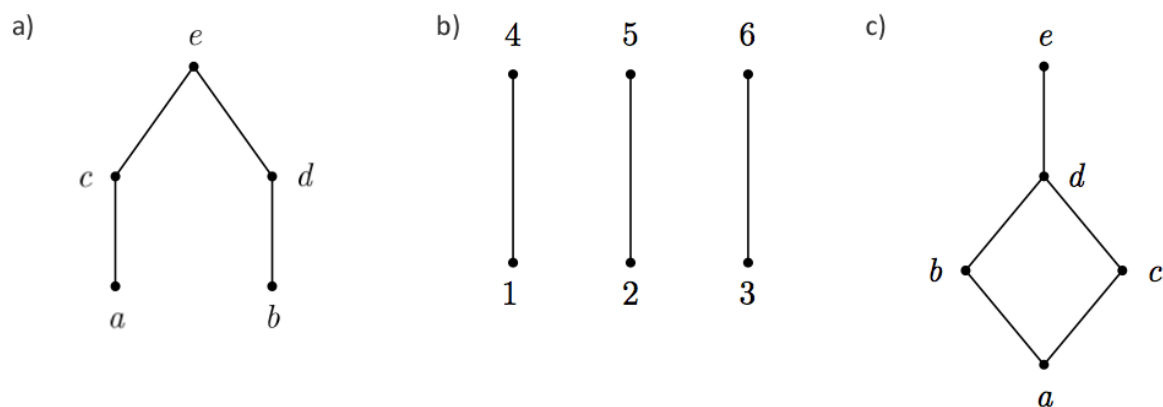
7. Seja S o conjunto de todas as pessoas que moram no Rio Grande do Sul. Classifique as relações binárias em S em reflexivas, simétricas, anti-simétricas ou transitivas.

- $x \rho y \leftrightarrow x$ é mais alto do que y
- $x \rho y \leftrightarrow x$ tem a mesma altura que y
- $x \rho y \leftrightarrow x$ é casado com y
- $x \rho y \leftrightarrow x$ possui os mesmos pais que y
- $x \rho y \leftrightarrow x$ é irmão de y

8. Construa o diagrama de Hasse para as seguintes ordens parciais.

- $S = \{1, 2, 3\}$
 $r = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$
- $S = \{1, 2, 3, 4\}$
 $r = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3)\}$

9. Para os diagramas de Hasse a seguir, liste os pares ordenados que pertencem à relação de ordem correspondente.



10. Para a relação de equivalência $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$, qual é o conjunto $[1]$? Esse conjunto possui outro nome?

- 11.** Para a relação de equivalência $r = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (c, b), (b, c), (c, c), (d, d), (e, e), (d, e), (e, d)\}$, qual é o conjunto $[c]$? E o conjunto $[d]$?
- 12.** Dadas as partições $\{a, b\}$ e $\{c, d\}$ do conjunto $S = \{a, b, c, d\}$, liste os pares ordenados pertencentes à relação de equivalência.
- 13.** Dadas as partições $\{1, 2, 3\}$ e $\{4, 5\}$ do conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, liste os pares ordenados pertencentes à relação de equivalência.
- 14.** Seja $S = \mathbb{N}$ e seja uma relação binária em S definida por $x \rho y \leftrightarrow x^2 + y^2$ é par. Mostre que ρ é uma relação de equivalência em S e descreva as classes de equivalência associadas.

Tics

FUNÇÕES

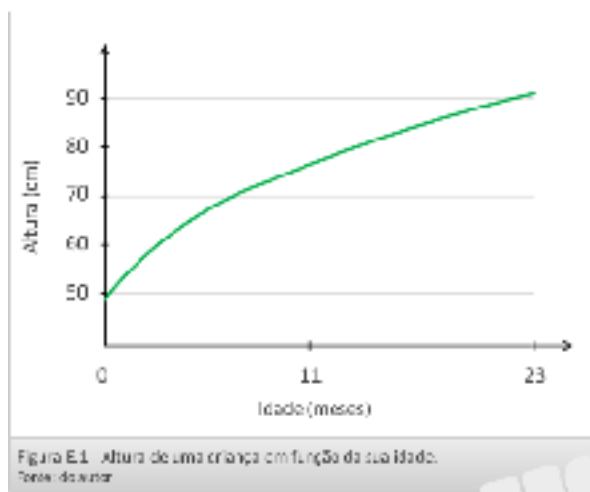
Unidade E
Fundamentos Matemáticos
da Computação

FUNÇÕES

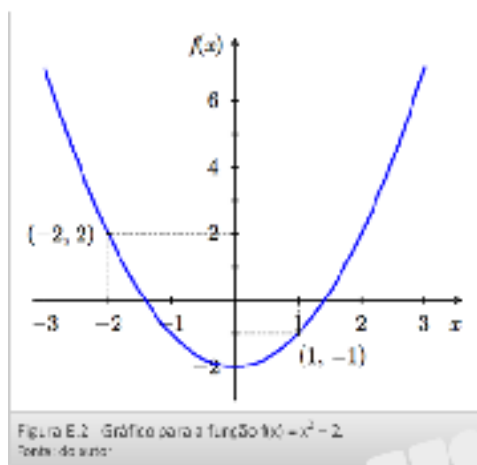
E.1 INTRODUÇÃO

Nessa unidade, nós vamos tratar de um caso especial de relações binárias de um conjunto S em um conjunto T : as funções. Funções são relações binárias nas quais para todo elemento do conjunto S corresponde um único elemento do conjunto T .

Função é uma expressão muito comum no nosso dia a dia. Imagine, por exemplo, uma revista que apresente uma reportagem sobre o crescimento de crianças. A reportagem poderia dizer que “A altura de uma criança depende da sua idade” ou “A altura de uma criança é função da sua idade”. Essa relação funcional pode ser expressa graficamente, como mostrada na Figura E.1. A figura explica que, quanto mais idade a criança tiver, maior será a sua altura.



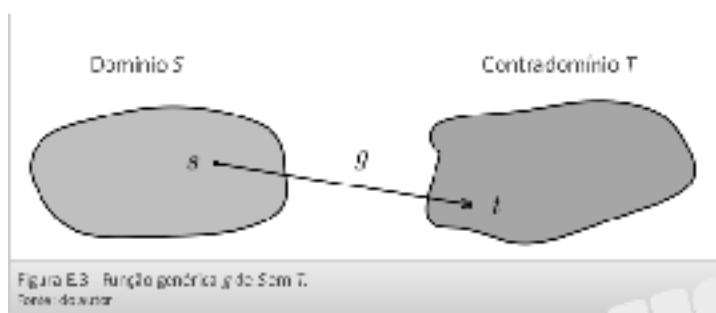
Nós também utilizamos as funções matemáticas em álgebra e cálculo. Por exemplo, a equação $f(x) = x^2 - 2$ expressa uma relação funcional entre os valores de x e os de f , quando x é substituído por seu valor na expressão de f . Assim, para $x = -2$, $f(-2) = 2$. De forma semelhante, $f(1) = -1$, e assim por diante. Observe que para cada valor de x , $f(x)$ é único. Ainda, temos que, se x puder assumir qualquer valor real, o gráfico resultante para a função $f(x)$ está mostrado na Figura E.2.



Dos exemplos apresentados, constatamos que existem três partes em uma função:

- um conjunto de valores iniciais ou *domínio* da função;
- um conjunto com os valores associados ou *contradomínio* da função;
- a associação propriamente dita.

A Figura E.3 apresenta uma função qualquer g . Nela, g é uma função de S em T , simbolizada por $g:S \rightarrow T$. S é o domínio e T é o contradomínio. A associação é um conjunto de pares ordenados da forma (s, t) , onde $s \in S$ e $t \in T$, ou seja, $t = g(s)$. Assim, observamos que a associação é um subconjunto de $S \times T$ (uma relação binária de S em T).



E.2 TERMINOLOGIA PARA FUNÇÕES

Sejam S e T conjuntos. Uma função f de S em T , $f:S \rightarrow T$, é um subconjunto de $S \times T$ tal que cada elemento de S aparece exatamente uma vez como a primeira componente de um par ordenado. S é o domínio e T é o contradomínio da função. Se (s, t) pertence à função, então denotamos t por $f(s)$, t é a imagem de s sob f , s é uma imagem inversa de t sob f e f leva s em t .

Uma função de S em T é um subconjunto de $S \times T$ com algumas restrições sobre os pares ordenados que a compõem. Por esse motivo, dizemos que uma função é um tipo particular de relação binária. Pela definição de função, uma relação do tipo um para muitos (ou muitos para muitos) não pode ser uma função. Além disso, cada elemento de S tem que aparecer como primeira componente.

- **Exemplo E.1:** Quais das relações a seguir são funções? Para as que não são, por que não?

a) $g:S \rightarrow T$, onde $S = T = \{a, b, c\}$ e $g = \{(a, a), (b, c), (c, a), (b, a)\}$

Não é função, pois existem dois valores associados a $b \in S$.

b) $g:\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, onde $g(x) = |x|$

É função.

c) $g:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, onde $g(x) = x - 2$

Não é função, pois para os valores 0 e 1 do domínio, os valores correspondentes de $g(x)$ não pertencem ao contradomínio.

d) $g:S \rightarrow T$, onde S é o conjunto de pessoas em sua família, T é o conjunto de todos os números de RG e g associa cada pessoa ao seu RG

Não é função, pois nem todas as pessoas de sua família possuem RG (por exemplo, as crianças pequenas).

e) $g:S \rightarrow T$, onde S é o conjunto de todos os polinômios de grau 2 em x com coeficientes inteiros, $T = \mathbb{Z}$ e $g(x) = a + b + c$

É função.

f) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $g(x) = 12x + 5$
É função.

g) $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, onde g é definida por

$$g(x) = \begin{cases} x-5 & \text{se } x \geq 3 \\ x & \text{se } x \leq 3 \end{cases}$$

Não é função, pois existem dois valores associados a $3 \in \mathbb{N}$.

A definição de função inclui funções em mais de uma variável. Podemos ter uma função $f: S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow T$ que associa a cada n -upla de elementos $(s_1, s_2, \dots, s_n)$, $s_i \in S_i$, um único elemento em T .

Por exemplo, seja a função $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \{3, 4\} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $g(x, y, z) = y^2 - x$. Então, $g(-2, 3, 4) = 3^4 - (-2) = 81 + 2 = 83$.

E.3 PROPRIEDADES DE FUNÇÕES

Função sobrejetora: uma função $f: S \rightarrow T$ é sobrejetora se sua imagem é igual ao seu contradomínio.

Função injetora: uma função $f: S \rightarrow T$ é injetora se nenhum elemento de T é a imagem, sob f , de dois elementos distintos em S .

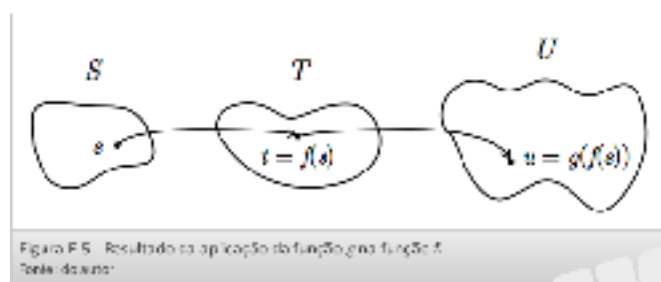
Função bijetora: uma função $f: S \rightarrow T$ é bijetora se é simultaneamente injetora e sobrejetora.

A Figura E.4 apresenta ilustrações simples das propriedades das funções. Em cada caso, o domínio está à esquerda e o contradomínio, à direita.



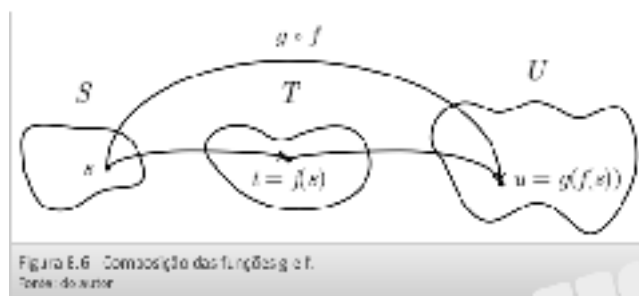
E.4 COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Considere que f e g são funções, com $f: S \rightarrow T$ e $g: T \rightarrow U$. Então, para todo $s \in S$, $f(s) = t$ é um elemento de T , que é o contradomínio de f . Logo, a função g pode ser calculada em $f(s)$. O resultado é $g(f(s)) = u$, que é um elemento de U . A Figura E.5 ilustra o procedimento descrito.



Resumindo o procedimento anterior, podemos dizer que escolhemos um elemento arbitrário s em S ,

aplicamos a função f neste elemento e , depois, aplicamos a função g a $f(s)$. Isso é a mesma coisa que associar um elemento de U a s . Assim, nós criamos uma função $S \rightarrow U$, denominada composição das funções f e g e denotada por $g \circ f$. A Figura E.6 ilustra o descrito.



Definição

Sejam as funções $f: S \rightarrow T$ e $g: T \rightarrow U$. A função composta $g \circ f$ é a função de S em U definida por $(g \circ f)(s) = g(f(s))$.

Observe que a função $g \circ f$ é aplicada da esquerda para a direita; primeiro aplicamos a função f e, após, a função g .

- **Exemplo E.2:** Sejam as funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 3$ e $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(x) = x^2$.

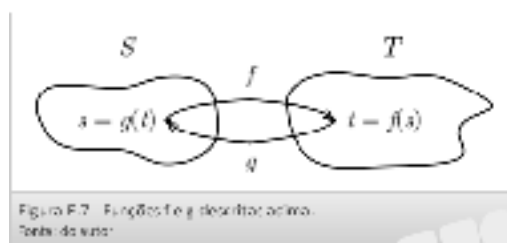
- Qual o valor de $(g \circ f)(2)$?
 $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2+3) = g(5) = 5^2 = 25$
- Qual o valor de $(f \circ g)(2)$?
 $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2^2) = f(4) = 4 + 3 = 7$

Teorema

A composição de duas funções bijetoras é também uma função bijetora.

E.5 FUNÇÕES INVERSAS

As funções bijetoras apresentam uma propriedade importante. Seja $f: S \rightarrow T$ uma bijeção. Como f é sobrejetora, todo $t \in T$ tem uma imagem inversa $s \in S$. Como f é injetora, essa imagem inversa é única. Assim, podemos associar a cada elemento $t \in T$ um único elemento $s \in S$, lembrando que $t = f(s)$. Esse procedimento descreve uma função $g: T \rightarrow S$. A Figura E.7 ilustra as funções f e g .



Observe que os domínios e os contradomínios de f e g são tais que podemos formar tanto $g \circ f: S \rightarrow T$ como $f \circ g: T \rightarrow S$. Se $s \in S$, então $(g \circ f)(s) = g(f(s)) = g(t) = s$. Logo, $g \circ f$ leva cada elemento de S nele mesmo.

Definição

Uma função f que leva cada elemento de um conjunto S em si mesmo é denominada de *função identidade* e é denotada por i_S .

Assim, em relação às funções f e g anteriores, temos que $f \circ g = i_T$ e $g \circ f = i_S$.

Definição

Seja f uma função, $f: S \rightarrow T$. Se existir uma função $g: T \rightarrow S$ tal que $g \circ f = i_S$ e $f \circ g = i_T$, então g é chamada de função inversa de f e denotada por f^{-1} .

TEOREMA SOBRE BIJEÇÕES E FUNÇÕES INVERSAS

Seja $f: S \rightarrow T$, então, f é uma função bijetora se, e somente se, f^{-1} existir.

Em outras palavras, podemos concluir que, se a função f é bijetora, isso equivale a dizer que a função f possui inversa.

- **Exemplo E.3:** Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 5$. Determine f^{-1} .
 $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f^{-1}(x) = (x - 5) / 2$

Resumindo o que estudamos sobre funções até o momento, a Tabela E.1 apresenta um breve sumário sobre as terminologias utilizadas no estudo de funções.

Expressão	Significado
função	aplicação de um conjunto em outro que leva cada elemento do conjunto inicial em exatamente um elemento do conjunto de chegada
domínio	conjunto inicial de uma função
contradomínio	conjunto de chegada de uma função
imagem	ponto que resulta da aplicação de uma função
imagem inversa	ponto inicial sobre o qual a função é aplicada
sobrejetora	a imagem é todo o contradomínio; todo elemento no contradomínio possui uma imagem inversa
injetora	dois elementos no domínio não podem ser levados ao mesmo ponto no contradomínio
bijetora	quando a função é injetora e sobrejetora simultaneamente
função identidade	leva cada elemento de um conjunto em si mesmo
função inversa	para uma função bijetora, é uma função que leva cada elemento no contradomínio de volta ao elemento de onde ele veio

Tabela E.1 Terminologias utilizadas no estudo de funções.

E.6 PERMUTAÇÕES

As funções bijetoras de um conjunto em si mesmo possuem um nome especial.

Definição de Permutações de um Conjunto: Para um dado conjunto A , $S_A = \{f \mid f: A \rightarrow A \text{ é uma função bijetora}\}$. S_A é, portanto, o conjunto de todas as funções bijetoras do conjunto A em si mesmo; essas funções são denominadas de permutações de A .

Assim, se f e g pertencem a S_A , então cada uma delas tem o domínio igual à imagem e igual ao próprio conjunto A . Além disso, como f e g são bijetoras, pelo teorema sobre a composição de funções bijetoras,

$g \circ f$ também é bijetora, ou seja, leva a um único elemento de S_A . Daí, podemos concluir que a composição de funções é uma operação binária no conjunto S_A .

NOTAÇÃO PARA PERMUTAÇÕES

As funções permutações representam arranjos ordenados de objetos no domínio. Dessa forma, uma das maneiras de descrevê-las é na forma de um arranjo retangular, onde os elementos do domínio ficam na linha de cima e os elementos da imagem ficam diretamente abaixo desses elementos.

Por exemplo, considere o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ e uma função permutação em A , f , dada por $f = \{(a, b), (b, c), (c, a), (d, d)\}$. A sua representação na forma de um arranjo retangular é

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$$

Observe que a linha de baixo é um arranjo ordenado dos objetos na linha de cima.

Outra maneira de descrever uma função permutação é com a notação de ciclo. Nessa, os elementos são listados um ao lado do outro, de modo que a função leva cada elemento ao que está imediatamente a sua direita e o último elemento na lista leva ao primeiro. Nessa notação, qualquer elemento que não apareça na lista significa que leva a si mesmo. Por exemplo, seja a função permutação f dada anteriormente, a sua notação de ciclo é $f = (a, b, c)$. Aqui, a leva a b , b leva a c , c leva a a e d leva em si mesmo.

- **Exemplo E.4:** Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $f \in S_A$ dada por

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & b & c & e & a \end{pmatrix}$$

- Escreva f em forma de ciclo.
 $f = (a, d, e)$

- **Exemplo E.5:** Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $g \in S_A$ dada por $g = (b, d, e, c)$. Escreva g na forma de arranjo retangular.

$$g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & d & b & e & c \end{pmatrix}$$

- **Exemplo E.6:** Considere $A = \{a, b, c, d\}$ e $f, g \in S_A$ dadas por $f = (a, b, c)$ e $g = (b, c)$. Determine a função composta $g \circ f$.
 - Inicialmente, vamos verificar o que acontece com o elemento a em A . Operando da direita para a esquerda (primeiro f , depois g), temos $a \rightarrow b$ sob f e, depois, $b \rightarrow c$ sob g . Assim, $a \rightarrow c$ sob $g \circ f$. De forma semelhante, $b \rightarrow c$ sob f e $c \rightarrow b$ sob g . Então, $b \rightarrow b$ sob $g \circ f$. Analogamente, temos $c \rightarrow a$ sob f e $a \rightarrow a$ sob g . Então, $c \rightarrow a$ sob $g \circ f$. e, finalmente, $d \rightarrow d$ sob f e $d \rightarrow d$ sob g . Então, $d \rightarrow d$ sob $g \circ f$. Concluindo, temos que $g \circ f = (a, c)$.

Teorema: Seja m o número de elementos no conjunto S ($|S| = m$) e n o número de elementos no conjunto T ($|T| = n$). Então:

1. O número de permutações de S é $P_S = m!$ e o de T é $P_T = n!$.
2. O número de funções $f: S \rightarrow T$ é n^m .
3. Supondo que $m \leq n$, o número de funções injetoras $f: S \rightarrow T$ é:

$$\frac{n!}{(n-m)!}$$

4. Supondo que $m \geq n$, o número de funções sobrejetoras $f: S \rightarrow T$ é

$$n^m - C(n, 1)(n-1)^m + C(n, 2)(n-2)^m - C(n, 3)(n-3)^m + \dots + (-1)^{n-1} C(n, n-1)(1)^m$$

onde $C(r, s)$ são as combinações de r elementos em grupos de s elementos, ou seja,

$$C(r, s) = \frac{r!}{s!(r-s)!}$$

- **Exemplo E.7:** Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. Determine:
 - o número de permutações P_A e P_B , respectivamente, nos conjuntos A e B ;
 - o número de funções sobrejetoras nfs de A em B .

Temos que $|A| = 3$ e $|B| = 2$. Então, pelo teorema anterior, obtemos:

$$a) \quad P_A = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$P_B = 2! = 2 \times 1 = 2$$

$$b) \quad nfs = 2^3 - C(2, 1)(1)^3 = 8 - 2 \times 1 = 6$$

E.7 CONJUNTOS EQUIVALENTES

Definições

Um conjunto S é equivalente a um conjunto T se existe uma função bijetora $f: S \rightarrow T$. Dois conjuntos equivalentes possuem a mesma cardinalidade.

Para conjuntos finitos, sabemos que, se S possui n elementos, então $\wp(S)$, conjunto de todas as partes de S , possui 2^n elementos. Evidentemente, $n < 2^n$ e não podemos determinar nenhuma função bijetora entre um conjunto com n elementos e um com 2^n elementos. Dessa forma, pela definição anterior, S e $\wp(S)$ não são conjuntos equivalentes.

Teorema de Cantor

Para qualquer conjunto S , S e $\wp(S)$ não são equivalentes.

E.8 ORDEM DE GRANDEZA DE FUNÇÕES

A *ordem de grandeza* é uma forma de compararmos a “taxa de crescimento” de funções distintas. Pela nossa prática, sabemos que se calcularmos $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ para valores cada vez maiores de x , os valores de g serão maiores do que os valores de f , e a diferença aumenta cada vez mais. Essa diferença não vai deixar de existir se multiplicarmos os valores de f por uma constante muito grande; não importa o tamanho da constante, em algum momento os valores de g certamente começarão a ficar maiores do que os de f . Para caracterizarmos essa diferença, definiremos uma relação binária nas funções.

Seja S o conjunto de todas as funções com domínio e contradomínio iguais aos números reais não-negativos. Podemos definir uma relação binária em S por

$$f \rho g \leftrightarrow \text{existem constantes positivas } n_0, c_1 \text{ e } c_2 \text{ tais que, para todo } x \geq n_0,$$

$$c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$$

- **Exemplo E.8:** Considere as funções f e g pertencentes a S , com $f(x) = 5x^2$ e $g(x) = 100x^2 + 100x + 25$. Sejam $n_0 = 1$, $c_1 = 1/100$ e $c_2 = 1$. Portanto, para $x \geq 1$, temos

$$\frac{1}{100}g(x) \leq f(x) \leq 1 \cdot g(x)$$

$$\frac{1}{100}(100x^2 + 100x + 25) \leq 5x^2 \leq 1 \cdot (100x^2 + 100x + 25)$$

$$x^2 + x + 0,25 \leq 5x^2 \leq 100x^2 + 100x + 25$$

Portanto, $f \rho g$.

- **Exemplo E.9:** Para os valores de x iguais a 2, 3, 4 e 5, verifique a desigualdade do Exemplo E.8.

a) $x = 2$: $2^2 + 2 + 0,25 \leq 5 \times 2^2 \leq 100 \times 2^2 + 100 \times 2 + 25$
 $6,25 \leq 400 \leq 625$

b) $x = 3$: $3^2 + 3 + 0,25 \leq 5 \times 3^2 \leq 100 \times 3^2 + 100 \times 3 + 25$
 $12,25 \leq 45 \leq 1225$

c) $x = 4$: $4^2 + 4 + 0,25 \leq 5 \times 4^2 \leq 100 \times 4^2 + 100 \times 4 + 25$
 $20,25 \leq 80 \leq 2025$

d) $x = 5$: $5^2 + 5 + 0,25 \leq 5 \times 5^2 \leq 100 \times 5^2 + 100 \times 5 + 25$
 $30,25 \leq 125 \leq 3025$

Exemplo E.10: Determine um novo conjunto de valores para n_0 , c_1 e c_2 que também comprovam $f \rho g$ no Exemplo E.8.

Considere $n_0 = 1$, $c_1 = 1/200$ e $c_2 = 1$. Portanto, para $x \geq 1$, temos

$$\frac{1}{200}g(x) \leq f(x) \leq 1 \cdot g(x)$$

$$\frac{1}{200}(100x^2 + 100x + 25) \leq 5x^2 \leq 1 \cdot (100x^2 + 100x + 25)$$

$$0,5x^2 + 0,5x + 0,125 \leq 5x^2 \leq 100x^2 + 100x + 25$$

- **Exemplo E.11:** Demonstre que ρ é simétrica e transitiva.
 - Admita $f \rho g$. Logo, existem constantes positivas n_0 , c_1 e c_2 tais que, para todo $x \geq n_0$, $c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$. Portanto, para $x \geq n_0$, $(1/c_2) f(x) \leq g(x) \leq (1/c_1) f(x)$, de modo que $g \rho f$.
 - Admita $f \rho g$ e $g \rho h$. Então, existem constantes positivas n_0 , n_1 , c_1 , c_2 , d_1 e d_2 tais que, $c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$ para $x \geq n_0$ e $d_1 h(x) \leq g(x) \leq d_2 h(x)$ para $x \geq n_1$. Portanto, para $x \geq \max(n_0, n_1)$, $c_1 d_1 h(x) \leq f(x) \leq c_2 d_2 h(x)$, de modo que $f \rho h$.

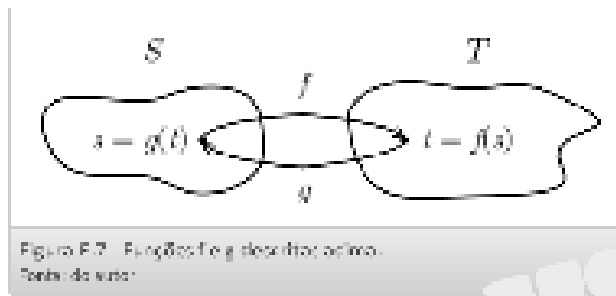
Definição

Sejam f e g funções dos reais não-negativos nos reais não-negativos. Então, f tem a mesma ordem de grandeza que g , denotada por $f = \Theta(g)$, se existem constantes positivas n_0 , c_1 e c_2 tais que, se $x \geq n_0$, $c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. A Figura E.8 representa uma função.

- Qual é o seu domínio? E o seu contradomínio? E a sua imagem?
- Qual é a imagem de c ? E a de e ?
- Qual é a imagem inversa de y ?
- Essa função é sobrejetora? Ela é injetora?



2. Se $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é definida por $f(x) = 2x^2 + 1$, determine $f(A)$ para $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. Sejam $S = \{0, 2, 4, 6\}$ e $T = \{1, 3, 5, 7\}$. Determine se cada um dos conjuntos de pares ordenados é uma função com domínio S e contradomínio T . Se for, a função é injetora? É sobrejetora?

- $\{(0, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 0)\}$
- $\{(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$
- $\{(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)\}$
- $\{(2, 1), (4, 5), (6, 3)\}$
- $\{(6, 1), (0, 3), (4, 1), (0, 7), (2, 5)\}$

4. Para as funções bijetoras do Exercício 3, descreva a função inversa.

5. As funções a seguir levam $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Determine equações que descrevam as composições $g \circ f$ e $f \circ g$ em cada caso.

- $f(x) = 8x^2$ e $g(x) = 4x$
- $f(x) = (x + 2) / 2$ e $g(x) = 2x^2$

6. Dadas as funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definidas por $f(x) = x + 2$ e $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por $g(x) = 5x$, calcule as expressões:

- $(g \circ f)(3)$
- $(f \circ g)(3)$
- $(g \circ f)(x)$
- $(f \circ g)(x)$
- $(f \circ f)(x)$
- $(g \circ g)(x)$

7. Para as funções bijetoras $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a seguir, determine f^{-1} .

- $f(x) = 5x$
- $f(x) = 2x^4$
- $f(x) = (2x - 5) / 4$

8. Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$. Escreva as permutações de A em ciclos.

- a. $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & b \end{pmatrix}$
- b. $f = \{(a,d), (b,e), (c,b), (d,c), (e,a)\}$

9. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Escreva as permutações de A em forma de arranjos retangulares.

- a. $f = \{(1,3), (2,2), (3,4), (4,1)\}$
- b. $f = (3,1,2,4)$
- c. $f = (4,2,1)$

10. Determine as composições dos ciclos a seguir que representam permutações de $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

- a. $(1,3,4) \circ (5,1,2)$
- b. $(2,7,8) \circ (1,2,4,6,8)$
- c. $(1,3,4) \circ (5,6) \circ (2,3,5) \circ (6,1)$
- d. $(2, 7, 1, 3) \circ (2, 8, 7, 5) \circ (4, 2, 1, 8)$

11. Dados $S = \{a, e, i, o\}$ e $T = \{x, y, z\}$.

- a. Determine o número de funções de S em T .
- b. Determine o número de funções sobrejetoras de S em T .

12. Dados $S = \{1, 4, 7\}$ e $T = \{2, 5, 8, 11\}$.

- a. Determine o número de funções de S em T .
- b. Determine o número de funções injetoras de S em T .

13. Seja o número de elementos em A igual a $|A| = 4$. Determine:

- a. o número de funções de A em A ;
- b. o número de funções injetoras de A em A ;
- c. o número de funções sobrejetoras de A em A ;
- d. o número de permutações de A .

14. Determine constantes que satisfaçam a definição de ordem de grandeza para provar que $f = \Theta(g)$ se $f(x) = x$ e $g(x) = 12x + 1$.

15. Determine constantes que satisfaçam a definição de ordem de grandeza para provar que $f = \Theta(g)$ se $f(x) = 3x^3 - 7x$ e $g(x) = x^3/2$.

Tics

COMBINATÓRIA

Unidade F
Fundamentos Matemáticos
da Computação

COMBINATÓRIA

F.1 INTRODUÇÃO

A *Combinatória* é a área da matemática que trata da contagem. Problemas relacionados à contagem sempre são importantes quando trabalhamos com recursos finitos. Por exemplo, “Quanto espaço de armazenamento um banco de dados utiliza?” ou “Quantos usuários uma certa configuração de computador pode suportar?” ou ainda “Quantos cálculos em ponto flutuante um determinado algoritmo realiza?”.

Problemas de contagem se resumem, muitas vezes, em determinar o número de elementos em algum conjunto finito. Essa questão, aparentemente trivial, pode ser difícil de responder.

F.2 O PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO

Inicialmente, considere a seguinte situação. Um estudante pode escolher um entre dois lápis, um HB e outro 2B, e uma entre três canetas, uma azul (A), outra preta (P) e outra vermelha (V). Quantos conjuntos diferentes o estudante pode ter?

Podemos resolver esse problema separando a tarefa de escolha do material escolar em duas etapas sequenciais: escolher, primeiro, o lápis e, depois, a caneta. A árvore da Figura F.1 mostra que existem $2 \times 3 = 6$ possibilidades: {HB, A}, {HB, P}, {HB, V}, {2B, A}, {2B, P} e {2B, V}.

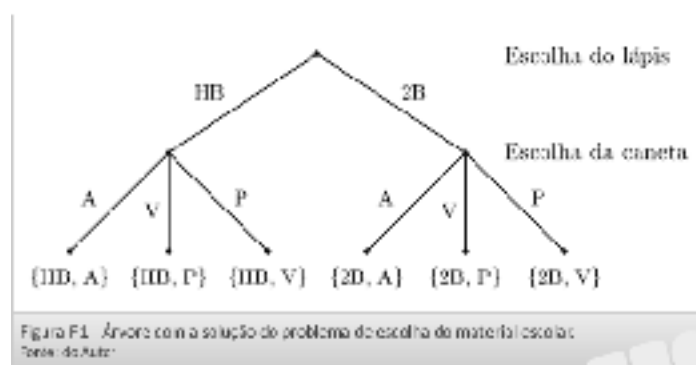


Figura F.1. Árvore com a solução do problema de escolha do material escolar.
Fonte: do Autor.

Nesse problema, a ordem dos eventos poderia ser trocada: o estudante poderia, primeiro escolher a caneta e, depois, o lápis. A Figura F.2 mostra a árvore de decisão. Observe que o número de possibilidades não se altera ($3 \times 2 = 6$).

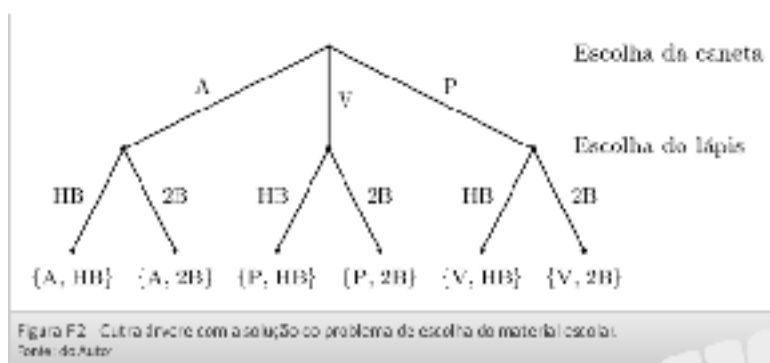


Figura F.2. Outra árvore com a solução do problema de escolha do material escolar.
Fonte: do Autor.

O problema da escolha do material escolar ilustra o fato de que o número total de resultados possíveis para uma sequência de eventos pode ser obtido multiplicando-se o número de possibilidades do primeiro evento pelo número de possibilidades do segundo.

Princípio da Multiplicação

Se existem n_1 resultados possíveis para um primeiro evento e n_2 para um segundo, então existem $n_1 \times n_2$ resultados possíveis para a sequência dos dois eventos.

O princípio da multiplicação é útil sempre que quisermos contar o número total de possibilidades para uma tarefa que pode ser dividida em uma sequência de etapas sucessivas.

- **Exemplo F.1:** A última parte de um número telefônico é composta por quatro dígitos. Quantos desses números existem?

Podemos formar números com quatro dígitos através de uma sequência de tarefas: escolher o primeiro dígito, depois o segundo, depois o terceiro e, finalmente, o quarto. Temos 10 dígitos disponíveis (de 0 a 9) para cada posição. Assim, temos 10 possibilidades para a primeira tarefa, 10 para a segunda, 10 para a terceira e 10 para a quarta. Portanto, temos que o total de números com quatro dígitos é $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$.

- **Exemplo F.2:** Em relação ao Exemplo F.1, quantos números de quatro dígitos existem se um mesmo dígito não puder ser repetido?

Novamente temos uma sequência de tarefas. Só que agora não podemos ter repetições. Assim, temos 10 possibilidades para o primeiro dígito, 9 para o segundo, 8 para o terceiro e 7 para o quarto. Portanto, o número total de possibilidades é $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$.

F.3 PRINCÍPIO DA ADIÇÃO

Para exemplificar esse princípio, vamos supor que temos que escolher um carro entre três brancos e quatro pretos. De quantas maneiras podemos fazer isso? Temos um evento com três possibilidades (a escolha do carro branco) e outro com quatro (a escolha do carro preto). Entretanto, não temos uma sequência de eventos, já que iremos comprar apenas um carro, que será escolhido dentre as possibilidades de dois conjuntos disjuntos. Assim, neste caso, o número de escolhas possíveis é o número total de escolhas que temos, $3 + 4 = 7$.

Princípio da Adição

Se A e B são eventos disjuntos com n_1 e n_2 resultados possíveis, respectivamente, então o número total de possibilidades para o evento " A ou B " é $n_1 + n_2$.

- **Exemplo F.3:** Um estudante deseja comprar um livro em uma livraria. A livraria dispõe de 31 livros de capa dura e 27 com capa simples. Quantas escolhas possui o estudante?

O estudante pode escolher um livro com capa dura ou com capa simples. Esses são eventos disjuntos. Pelo princípio da adição, a escolha do livro tem $31 + 27 = 58$ possibilidades.

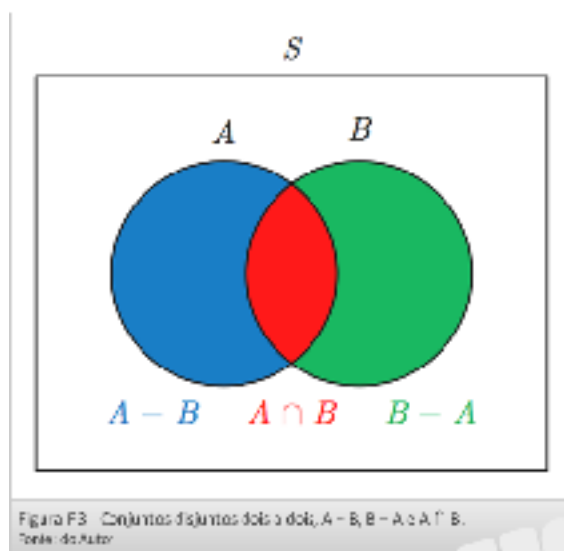
F.4 OS PRINCÍPIOS DA MULTIPLICAÇÃO E DA ADIÇÃO JUNTOS

Em problemas de contagem, frequentemente utilizamos os princípios da multiplicação e da adição juntos. Os exemplos a seguir ilustram esse fato.

- **Exemplo F.4:** Considere o problema do estudante apresentado no início dessa unidade. Suponha que desejamos determinar de quantas formas diferentes o estudante pode escolher o material escolar, ao invés do número de conjuntos de material escolar que ele pode ter. Assim, escolher um lápis HB e, depois, uma caneta azul não é a mesma coisa que escolher primeiro uma caneta azul e, depois, um lápis HB. Podemos considerar dois casos disjuntos (a escolha do lápis ou da caneta primeiro). Cada um desses casos, pelo princípio da multiplicação, possui 6 possibilidades, de modo que, pelo princípio da adição, existem $6 + 6 = 12$ formas diferentes de escolher o material escolar.
- **Exemplo F.5:** Quantos números de quatro dígitos iniciam com 2 ou 8? Novamente, podemos considerar dois conjuntos disjuntos – os números que iniciam com 2 e os que iniciam com 8. Para os números que iniciam com o dígito 2, há uma possibilidade para o primeiro dígito (tem que ser 2) e 10 possibilidades para as demais três posições do número. Assim, pelo princípio da multiplicação, existem $1 \times 10 \times 10 \times 10 = 1.000$ formas de se obter um número de quatro dígitos iniciando pelo dígito 2. Raciocínio idêntico pode ser aplicado para os números que iniciam com o dígito 8. Portanto, pelo princípio da adição, existem $1.000 + 1.000 = 2.000$ possibilidades ao todo.
- **Exemplo F.6:** Se um rapaz possui 6 camisas, 5 calças e 3 pijamas, de quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?
Inicialmente, temos que considerar o fato de que, se o rapaz vestir camisa e calça, ele não usará pijama, e vice-versa. Portanto, podemos dividir a contagem em dois problemas disjuntos: um da escolha da camisa e da calça e outro da escolha do pijama. Para o primeiro, pelo princípio da multiplicação, há $6 \times 5 = 30$ possibilidades. Para o segundo, existem 3 possibilidades. Então, pelo princípio da adição, existem $30 + 3 = 33$ formas diferentes do rapaz se vestir.
- **Exemplo F.7:** Quantos números inteiros com 3 dígitos são ímpares? A solução está baseada no fato de que os números ímpares obrigatoriamente terminam em 1, 3, 5, 7 ou 9. Podemos, então, considerar 5 casos disjuntos, um para cada terminação. Para os números terminados com o dígito 1, temos 10 possibilidades para o primeiro dígito e mais 10 possibilidades para o segundo dígito. Assim, pelo princípio da multiplicação, existem $10 \times 10 \times 1 = 100$ possibilidades de números com três dígitos terminados em 1. Analogamente, existem 100 possibilidades de números com três dígitos terminados em 3, terminados em 5, terminados em 7 e terminados em 9. Portanto, pelo princípio da adição, existem $100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 500$ números inteiros de três dígitos que são ímpares.

F.5 PRINCÍPIO DE INCLUSÃO E EXCLUSÃO

Inicialmente, vamos observar que, se A e B são subconjuntos de um conjunto universo S , então $A - B$, $B - A$ e $A \cap B$ são disjuntos dois a dois. Isso significa que, se $x \in A - B$, então $x \notin B - A$ e $x \notin A \cap B$. A Figura F.3 ilustra esse fato.



Observando a Figura F.3, podemos deduzir outros pontos importantes em relação ao número de elementos em cada subconjunto. Notamos que:

$$|(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B| \quad (\text{F.1})$$

e

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| \quad (\text{F.2})$$

e

$$|B - A| = |B| - |A \cap B| \quad (\text{F.3})$$

Ainda, pela análise da Figura F.3, podemos concluir que

$$(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B \quad (\text{F.4})$$

Usando as expressões (F.2), (F.3) e (F.4) na equação (F.1), obtemos que

$$|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|$$

ou

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (\text{F.5})$$

A equação (F.5) é o princípio de inclusão e exclusão para dois conjuntos. O nome deriva do fato de que, ao contar o número de elementos na união de A e B, precisamos somar (incluir) o número de elementos de A e o número de elementos de B e precisamos subtrair (excluir) o número de elementos de $A \cap B$, para evitar contá-los duas vezes.

- **Exemplo F.8:** Uma pesquisa eleitoral entrevistou 100 eleitores, todos apoiando o candidato 1, o candidato 2 ou ambos, e descobriu que 45 eleitores apóiam o candidato 1 e 63 apóiam o candidato 2. Quantos eleitores apóiam ambos os candidatos?

Denotando por A o conjunto dos eleitores que apóiam o candidato 1 e por B o conjunto dos eleitores que apóiam o candidato 2, temos que $|A \cup B| = 100$, $|A| = 45$ e $|B| = 63$. Utilizando a equação (F.5), temos que

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 45 + 63 - 100 = 8$$

Portanto, há 8 eleitores que apóiam ambos os candidatos.

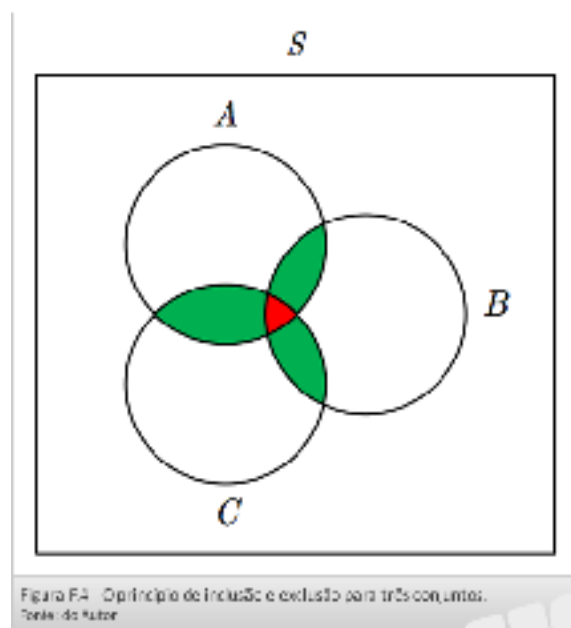
A equação (F.5) pode ser estendida a três conjuntos, como a seguir.

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| = \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - (|A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|) = \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|
\end{aligned}$$

Portanto, a versão do princípio de inclusão e exclusão para três conjuntos é

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (F.6)$$

A Figura F.4 apresenta uma demonstração geométrica para $|A \cup B \cup C|$. Quando somamos $|A| + |B| + |C|$, estamos contando cada elemento em $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ e $|B \cap C|$ duas vezes, de modo que devemos retirar cada um deles uma vez. Por outro lado, quando somamos $|A| + |B| + |C|$, estamos contando cada elemento de $|A \cap B \cap C|$ três vezes, mas ao subtrair $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ e $|B \cap C|$, eliminamos três vezes esses elementos, logo precisamos colocá-los de volta uma vez.



- **Exemplo F.9:** Um grupo de estudantes planeja comprar canetas. Desses, 15 preferem canetas azuis, 12 preferem canetas pretas, 8 preferem canetas verdes, 6 podem usar canetas azuis ou pretas, 4 podem usar tanto canetas azuis como verdes, 5 usam tanto canetas pretas quanto verdes e 2 não se importam de usar qualquer cor de caneta. Quantos estudantes há no grupo?

Por uma questão de ordem, façamos:

- A = conjunto dos estudantes que usam canetas azuis
- B = conjunto dos estudantes que usam canetas pretas
- C = conjunto dos estudantes que usam canetas verdes.

Dessa forma, temos que $|A|=15$, $|B|=12$, $|C|=8$, $|A \cap B|=6$, $|A \cap C|=4$, $|B \cap C|=5$ e $|A \cap B \cap C|=2$. Pelo princípio de inclusão e exclusão, temos que

$$|A \cup B \cup C| = 15 + 12 + 8 - 6 - 4 - 5 + 2 = 22$$

Portanto, existem 22 estudantes no grupo.

- **Exemplo F.10:** Uma pizzeria vende três tipos de pizza: calabresa, de queijo e portuguesa. Em um determinado dia, a pizzeria atendeu 251 clientes. Desses, 127 clientes comeram pizza calabresa, 187 comeram pizza de queijo, 38 comeram pizza portuguesa, 56 comeram pizzas calabresa e de queijo, 44 comeram pizzas de queijo e portuguesa e 8 comeram os três tipos de pizza. Quantos clientes comeram pizzas calabresa e portuguesa?

Façamos: A = conjunto dos clientes que comeram pizzas calabresas B = conjunto dos clientes que comeram pizzas de queijo C = conjunto dos clientes que comeram pizzas portuguesas
Dessa forma, sabemos que $|A \cup B \cup C| = 251$, $|A| = 127$, $|B| = 187$, $|C| = 38$, $|A \cap B| = 56$, $|B \cap C| = 44$ e $|A \cap B \cap C| = 8$. Pelo princípio de inclusão e exclusão, temos que

$$|A \cap C| = 127 + 187 + 38 - 56 - 44 + 8 - 251 = 9$$

Portanto, 9 pessoas comeram pizzas calabresa e portuguesa.

Definição

Princípio de Inclusão e Exclusão: Dados conjuntos finitos $A_1, A_2, \dots, A_n$, com $n \geq 2$, tem-se que

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \quad (F.7)$$

F.6 O PRINCÍPIO DAS CASAS DE POMBO

Esse princípio recebeu esse nome baseado na seguinte ideia: se mais de k pombos entram em k casas de pombos, então, pelo menos, uma casa vai ter mais de um pombo. Aprofundando essa ideia, suponha que cada casa contenha, no máximo, um pombo. Então existem, no máximo, k pombos e não os “mais de k ” pombos que supostamente entraram nas casas.

Definição

Princípio das Casas de Pombo: Se mais de k itens são colocados em k caixas, então, pelo menos, uma caixa contém mais de um item.

- **Exemplo F.11:** Quantas pessoas precisam estar presentes em uma sala para garantir que duas delas tenham o último nome começando com a mesma letra?
O alfabeto possui 26 letras (caixas). Se a sala tiver 27 pessoas, então existem 27 iniciais (itens) para se colocar em 26 caixas, de modo que, pelo menos, uma caixa conterá mais de uma inicial. Portanto, precisam estar presentes, no mínimo, 27 pessoas.
- **Exemplo F.12:** Quantas vezes é preciso jogar um dado de modo a garantir que um mesmo valor apareça duas vezes?
Um dado apresenta 6 números (caixas). Se ele for jogado 7 vezes, então existem 7 jogadas (itens) para se colocar em 6 caixas, de modo que, pelo menos, uma caixa conterá mais de uma jogada (número repetido). Portanto, é necessário jogar o dado, no mínimo, 7 vezes.

F.7 PERMUTAÇÕES

No Exemplo F.2, discutimos o problema de contar todas as possibilidades para os quatro últimos dígitos de um número telefônico sem repetição. Assim, observe que o número 5478 não é igual ao 4587, pois a ordem dos dígitos importa. Um arranjo ordenado de objetos é chamado de *permutação*. Cada um desses números telefônicos é uma permutação de 4 objetos distintos escolhidos em um conjunto de 10 objetos distintos (os dígitos). Quantas dessas permutações são possíveis? A resposta encontrada pelo princípio da multiplicação foi $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$, ou seja, 10 escolhas para o primeiro dígito, 9 para o segundo (não são permitidas repetições de dígitos), 8 para o terceiro e 7 para o último dígito. O número de permutações de r objetos distintos escolhidos entre n objetos distintos é denotado por $P(n, r)$. Portanto, no caso em questão, a solução pode ser expressa como $P(10, 4)$.

É possível escrever uma fórmula para $P(n, r)$ usando a função fatorial. Para um inteiro positivo n , n fatorial é definido por $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$ e é denotado por $n!$.

Definição

Dados n objetos distintos, o número de possibilidades de agrupá-los em grupos de r objetos distintos é

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!} \quad \text{para } 0 < r \leq n$$

- **Exemplo F.13:** Quantas palavras de três letras (mesmo que sem sentido) podem ser formadas a partir da palavra “software” se nenhuma letra pode ser repetida?

Observe que, nesse caso, a ordem das letras faz diferença. Assim, estamos interessados em determinar o número de permutações de três objetos distintos em um conjunto de 8 objetos distintos (as letras da palavra “software”).

Portanto, queremos $P(8, 3)$.

$$P(8, 3) = \frac{8!}{(8 - 3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{40320}{120} = 336$$

- **Exemplo F.14:** Vinte e cinco atletas competem em uma olimpíada em um determinado esporte. Serão premiados os três primeiros colocados com medalhas de ouro, prata e bronze, respectivamente. De quantos modos diferentes essas medalhas poderão ser distribuídas?

A ordem em que as medalhas serão entregues aos atletas é importante, ou seja, o atleta A receber medalha de ouro, o B de prata e o C de bronze é diferente do atleta C receber medalha de ouro, o A de prata e o B de bronze.

Assim, estamos querendo determinar o número de permutações de três objetos (as medalhas) em um conjunto de 25 atletas.

$$P(25, 3) = \frac{25!}{(25 - 3)!} = \frac{25!}{22!} = 13.800$$

- **Exemplo F.15:** De quantas maneiras diferentes podemos selecionar um zagueiro e um atacante em um grupo de 15 jogadores?

$$P(15, 2) = \frac{15!}{(15 - 2)!} = \frac{15!}{13!} = 210$$

F.8 COMBINAÇÕES

Às vezes, queremos selecionar r objetos de um conjunto de n objetos, porém não nos importamos com a ordem. Nesse caso, estamos contando o número de combinações de r objetos distintos escolhidos entre n objetos distintos, que usaremos a notação $C(n, r)$. Para cada uma das combinações, existem $r!$ maneiras de ordenar os r objetos escolhidos. Pelo princípio da multiplicação, o número de permutações de r objetos distintos escolhidos entre n objetos é o produto do número de escolhas possíveis dos objetos, $C(n, r)$, pelo número de maneiras de ordenar os objetos escolhidos, $r!$, portanto

$$C(n, r) \cdot r! = P(n, r)$$

ou

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n - r)!} \quad \text{para } 0 < r \leq n$$

- **Exemplo F.16:** Em uma caixa, temos 14 bolas numeradas de 1 a 14. De quantas maneiras podemos retirar grupos com três bolas?
Observe que a ordem numérica das bolas não é importante. Assim, temos um problema típico de combinações, isto é, $C(14, 3)$.

$$C(14, 3) = \frac{P(14, 3)}{3!} = \frac{14!}{3!(14-3)!} = \frac{14!}{3!11!} = 364$$

- **Exemplo F.17:** Considere o Exemplo F.14. Suponha, agora, que queiramos saber apenas de quantas maneiras três atletas podem ser premiados nos três primeiros lugares.
Observe que, agora, a ordem em que os atletas serão premiados não é mais importante. Portanto, a solução é

$$C(25, 3) = \frac{P(25, 3)}{3!} = \frac{25!}{3!(25-3)!} = \frac{25!}{3!22!} = 2.300$$

- **Exemplo F.18:** De quantas maneiras é possível escolher uma comissão de 4 pessoas em um grupo de 10 pessoas?

$$C(10, 4) = \frac{P(10, 4)}{4!} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!6!} = 210$$

Atenção

Lembre-se que a diferença entre permutações e combinações consiste em se os objetos são simplesmente selecionados ou se são selecionados e ordenados. Se a ordem é relevante, o problema envolve permutações; se a ordem não é relevante, o problema envolve combinações.

Ao se resolver problemas de contagem, frequentemente utilizamos mais de uma técnica simultaneamente. Por exemplo, podemos utilizar combinações junto com os princípios da multiplicação ou da adição.

- **Exemplo F.19:** Em uma escola, desejamos formar uma comissão de dez estudantes escolhida entre duas turmas com 20 estudantes (Turma A) e 30 estudantes (Turma B). Pergunta-se:
 - a) De quantas maneiras é possível selecionar 4 estudantes da Turma A e 6 da Turma B?
 - b) De quantas maneiras é possível selecionar uma comissão com exatamente 1 estudante da Turma A?
 - c) De quantas maneiras é possível selecionar uma comissão com, no máximo, 1 estudante da Turma A?
 - d) De quantas maneiras é possível selecionar uma comissão com, pelo menos, 1 estudante da Turma A?
- Primeiramente, observe que a ordem dos estudantes não é importante. Assim, temos problemas de combinações. Agora, vamos analisar caso a caso.
 - a) Aqui, temos uma sequência de duas tarefas, selecionar estudantes da Turma A e selecionar estudantes da Turma B. Assim, vamos usar o princípio da multiplicação para resolver esse problema. Para a Turma A, temos $C(20, 4)$ e para a Turma B, $C(30, 6)$. Portanto, a solução é:

$$C(20, 4) \cdot C(30, 6) = \frac{20!}{4!16!} \cdot \frac{30!}{6!24!} = 4.845 \times 593.775 = 2.876.839.875$$

- b) Novamente uma sequência de tarefas. Primeiro, selecionar um único estudante da Turma A e, depois, selecionar o restante da comissão entre os estudantes da Turma B. Assim, existem $C(20, 1)$ maneiras de se selecionar um único estudante da Turma A e $C(30, 7)$ de se selecionar o restante da comissão entre os estudantes da turma B. Portanto, a solução é:

$$C(20, 1) \cdot C(30, 7) = \frac{20!}{1!19!} \cdot \frac{30!}{7!23!} = 20 \times 2.035.800 = 40.716.000$$

- c) Agora, note que para termos, no máximo, 1 estudante da Turma A na comissão significa que podemos ter ou 1 ou 0 estudante da turma na comissão. Esses eventos são disjuntos, o que nos obriga a usar o princípio da adição. O número de maneiras de se selecionar exatamente 1 estudante da Turma A para a comissão é a resposta do item b. O número de maneiras de se selecionar 0 estudante da Turma A para a comissão é o mesmo que selecionar a comissão toda entre os estudantes da Turma B, ou seja, $C(30, 8)$. Portanto, a solução é

$$C(20,1) \cdot C(30,7) + C(30,8) = \frac{20!}{1!19!} \cdot \frac{30!}{7!23!} + \frac{30!}{8!22!} =$$

$$= 40.716.000 + 5.852.925 = 238.307.694.300.000$$

- d) Há várias formas de resolver esse item. A mais simples é resolver contando todas as maneiras possíveis de se formar a comissão com 8 estudantes selecionados entre os 50 estudantes disponíveis (as turmas A e B juntas) e, depois, eliminar (subtrair) o número de comissões formadas exclusivamente por estudantes da Turma B. Logo, a resposta é

$$C(50,8) - C(30,8) = 536.878.650 + 5.852.925 = 531.025.725$$

Resumo

Nessa unidade, apresentamos e discutimos algumas técnicas de contagem. A Tabela F.1 resume as metodologias que podem ser aplicadas em várias situações, embora seja importante frisar que possam existir mais de uma metodologia para resolver o mesmo problema ou também a utilização simultânea de duas ou mais técnicas.

Desejamos contar o número de ...	Técnica a ser empregada
Subconjuntos de um conjunto com n elementos	Use a fórmula 2^n
Possibilidades de resultados de eventos sucessivos	Multiplique o número de resultados possíveis para cada evento
Possibilidades de resultados de eventos disjuntos	Some o número de resultados possíveis para cada evento
Possibilidades de resultados dadas escolhas específicas em cada etapa	Desenhe uma árvore de decisão e conte o número de caminhos
Elementos em partes da interseção de conjuntos	Use a fórmula para o princípio de inclusão e exclusão
Arranjos ordenados de r entre n objetos distintos	Use a fórmula para $P(n, r)$
Maneiras de selecionar r entre n objetos distintos	Use a fórmula para $C(n, r)$
Maneiras de selecionar, com repetição permitida, r entre n objetos distintos	Use a fórmula para $C(r + n - 1, r)$

Tabela F.1: Problema de contagem × Técnica de contagem.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Em uma sorveteria, pode-se escolher sorvetes nos sabores morango, limão, creme, pistache, flocos ou napolitano, com um acompanhamento entre flocos de amendoim, balas de goma ou flocos de arroz e uma cobertura que pode ser de chocolate, baunilha ou leite condensado. Quantos sorvetes diferentes podem ser montados?
2. Em relação ao Exercício 1, se uma pessoa for alérgica a pistache e flocos de amendoim, quantas possibilidades de escolha de sorvete ainda são possíveis?
3. Uma senha para acesso a um sistema eletrônico consiste de quatro letras seguidas de dois números. Quantas senhas diferentes existem?
4. Em relação ao Exercício 3, se ainda houver diferenciação entre letras maiúsculas e minúsculas, quantas senhas podem ser criadas?
5. Quantos números de três dígitos menores do que 500 podem ser formados usando-se os algoritmos 1, 3, 5 e 7?
6. Deve-se escolher dois operários para formarem uma comissão. Existem 15 voluntários do setor A e 22 do setor B. Se a comissão deve ser formada por operários do mesmo setor, de quantas maneiras diferentes a comissão pode ser formada?
7. Um byte é formado por 8 bits que podem ser 0 ou 1. Pergunta-se:
 - a. Quantos bytes existem?
 - b. Quantos começam e terminam com 1?
 - c. Quantos começam ou terminam com 1?
 - d. Quantos têm o segundo dígito igual a 0?
 - e. Quantos começam com 010?
 - f. Quantos começam com 11 ou terminam com 01?
8. Em um grupo de 50 cientistas, todos falam inglês ou alemão, 42 falam inglês e 26 falam alemão. Quantos cientistas falam inglês e alemão?
9. Em uma festa, todos os convidados bebem cerveja ou uísque, 21 convidados bebem cerveja, 13 bebem uísque e 5 bebem tanto cerveja como uísque. Quantos convidados há nessa festa?
10. Em um grupo de 30 jovens que ouvem rock, música gospel ou axé music, 20 gostam de rock, 22 de música gospel, 16 de rock e música gospel, 12 de rock e axé music, 16 de música gospel e axé music e 12 gostam dos três tipos de música. Quantas pessoas gostam de música gospel?
11. Uma pesquisa entre 200 jovens de um bairro mostrou que 91 têm carro, 102 têm bicicleta, 33 têm moto, 58 têm carro e bicicleta, 21 têm carro e moto, 10 têm bicicleta e moto e 4 têm os três veículos.
 - a. Quantos jovens têm apenas bicicleta?
 - b. Quantos jovens não têm nenhum dos três?
12. Se 12 cartas forem retiradas de um baralho padrão, é possível que, pelo menos, duas sejam do mesmo naipe?
13. Em um grupo de 25 pessoas, é possível que existam, pelo menos, três pessoas que nasceram no mesmo mês?

14. De quantas maneiras diferentes podemos ordenar 7 objetos?

15. Os 12 clubes de futebol de uma região deverão aparecer em uma lista. Quantas listas diferentes são possíveis?

16. De quantas maneiras diferentes 6 homens e 8 mulheres podem estar localizados em uma fila?

17. De quantas maneiras uma pessoa pode selecionar 6 bolas azuis e 3 bolas vermelhas em uma coleção de 25 bolas azuis e 12 bolas vermelhas?

18. Um estudante precisa selecionar 6 disciplinas, entre 12, para o próximo semestre e uma delas tem que ser Matemática ou Física. De quantas maneiras o estudante pode escolher suas disciplinas?

19. Uma comissão em uma câmara municipal deve ser formada por três vereadores. Os vereadores estão assim distribuídos:

- cinco apóiam o prefeito;
- três são de partidos de oposição;
- quatro pertencem a partidos independentes.

a. De quantas maneiras pode-se escolher essa comissão?

b. De quantas maneiras pode-se escolher essa comissão se ela deve incluir, pelo menos, um vereador pertencente a um partido independente?

c. De quantas maneiras pode-se escolher essa comissão se ela não pode incluir ao mesmo tempo vereadores pertencentes a partidos que apóiam o prefeito e vereadores de partidos de oposição?

d. De quantas maneiras pode-se escolher essa comissão se ela deve incluir, pelo menos, um vereador pertencente a um partido que apóia o prefeito e, pelo menos, um vereador de partidos da oposição?

20. Quantas soluções distintas, inteiras e não-negativas existem para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ se as soluções $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ e $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$ são consideradas distintas?



Tics



MATRIZES

Unidade G
Fundamentos Matemáticos
da Computação

UNIDADE

G

MATRIZES

G.1 TERMINOLOGIA

Os dados em muitos problemas matemáticos podem ser apresentados em forma de um arranjo retangular de valores; esse arranjo é chamado de *matriz*. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & 8 & -1 & 7 & -9 \\ 3 & 5 & -8 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz com três linhas e cinco colunas. A *dimensão* da matriz é dada pelo seu número de linhas e de colunas. No nosso exemplo, temos uma matriz com dimensão 3×5 .

Os elementos de uma matriz A são denotados por a_{ij} , onde i é o índice da linha e j é o índice da coluna onde o elemento está. No nosso exemplo, o elemento a_{24} da matriz A vale 7, pois esse elemento está localizado na segunda linha e quarta coluna.

Em uma matriz, a distribuição dos seus elementos é importante. Assim, para que duas matrizes sejam iguais, elas devem possuir a mesma dimensão e os mesmos elementos nas mesmas posições. Por exemplo, sejam as matrizes

$$X = \begin{bmatrix} a & 4 & b \\ -2 & c & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & v & 4 \\ -2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Para que $X = Y$, temos que ter obrigatoriamente $a = -1$, $b = 4$, $c = 3$ e $v = 4$.

Em muitos problemas práticos, surge um tipo de *matriz* chamada de *matriz quadrada*, na qual o número de linhas e o número de colunas são iguais. Se A é uma matriz quadrada $n \times n$, então os elementos a_{11} , a_{22} , a_{33} , ..., a_{nn} formam a diagonal principal da matriz.

Outro tipo especial de matriz surge quando imaginamos dobrar uma matriz quadrada ao meio ao longo da diagonal principal, e os elementos que se sobrepõem são iguais. Nesse caso, temos uma matriz *simétrica*, na qual $a_{ij} = a_{ji}$. Por exemplo, considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

A matriz A é quadrada com dimensão 3×3 e também é simétrica. A parte triangular superior (a parte acima da diagonal principal) é uma reflexão da parte triangular inferior. Ainda observe que $a_{12} = a_{21} = 1$, $a_{13} = a_{31} = 4$ e $a_{23} = a_{32} = 5$.

G.2 OPERAÇÕES MATRICIAIS

MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR

Essa operação multiplica cada elemento de uma matriz por um único valor fixo, chamado *escalar*. O resultado é uma matriz com a mesma dimensão que a matriz original.

- **Exemplo G.1:** Multiplique a matriz A pelo escalar $r = 2$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, queremos determinar a matriz $B = r \cdot A$. Assim, temos que

$$B = r \cdot A = 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 10 & 12 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

SOMA DE MATRIZES

A soma de duas matrizes A e B apenas está definida quando as matrizes possuem a mesma dimensão. Nesse caso, somamos os elementos correspondentes das matrizes. Matematicamente, se A e B são matrizes $m \times n$, então $C = A + B$ é uma matriz também $m \times n$ com elementos

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- **Exemplo G.2:** Some as matrizes A e B a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 8 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Temos, então que:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 8 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 14 & 3 \\ 5 & 6 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

- A subtração de matrizes é definida por $A - B = A + (-1) \cdot B$.
- Em uma matriz nula, todos os seus elementos são iguais a zero. Se somarmos uma matriz nula $m \times n$ a qualquer outra matriz A , também $m \times n$, o resultado é a própria matriz A . Isso pode ser simbolizado por $0 + A = A$.
- Se A e B são matrizes $m \times n$ e se r e s são escalares, as seguintes equações matriciais são verdadeiras:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$r(A + B) = rA + rB$$

$$(r + s)A = rA + sA$$

$$r(sA) = (rs)A$$

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

A definição do produto de matrizes é baseada na utilização de matrizes em matemática para representar certas funções, conhecidas como transformações lineares, que levam pontos do plano real em pontos do plano real.

Assim, para efetuarmos o produto entre duas matrizes A e B , o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B . Então, podemos calcular $A \cdot B$ se A é uma matriz $m \times p$ e B é uma matriz $p \times n$. O resultado será uma matriz com dimensão $m \times n$. O elemento da matriz $A \cdot B$ na linha i , coluna j , é obtido multiplicando-se os elementos da linha i da matriz A pelos elementos correspondentes na coluna j da matriz B e somando-se todos os resultados. Matematicamente, temos que $C = A \cdot B$ com

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \times b_{kj}$$

- **Exemplo G.3:** Determine a matriz $C = A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Inicialmente, observe que a matriz A é 3×2 e que a matriz B é 2×4 ou seja, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B . Portanto, podemos realizar o produto $A \cdot B$, cujo resultado será uma matriz 3×4 .

Para determinarmos o elemento c_{11} da matriz C , multiplicamos a linha 1 de A pela coluna 1 de B , somando os resultados, isto é,

$$2 \times 5 + 4 \times 6 = 10 + 24 = 34$$

A Figura G.1 ilustra o procedimento descrito.

Figura G.1 – Procedimento para determinar o elemento c_{11} da matriz $C = A \cdot B$.
Fonte: do Autor

O elemento c_{12} é obtido multiplicando a linha 1 de A pela coluna 2 de B , somando os resultados, isto é,

$$2 \times 2 + 4 \times 4 = 4 + 16 = 20$$

A Figura G.2 ilustra o procedimento.

Figura G.2 – Procedimento para determinar o elemento c_{12} da matriz $C = A \cdot B$.
Fonte: do Autor

O produto completo é:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 34 & 20 & -14 & 4 \\ 13 & 10 & -8 & 3 \\ -4 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Exemplo G.4:** Dadas as matrizes A e B , calcule $C = A \cdot B$ e $D = B \cdot A$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 4 \times 2 + 3 \times 6 & 2 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 5 \\ 4 \times 5 + (-1) \times 2 + 2 \times 6 & 4 \times 3 + (-1) \times 2 + 2 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 29 \\ 30 & 20 \end{bmatrix}$$

$$D = B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 2 + 3 \times 4 & 5 \times 4 + 3 \times (-1) & 5 \times 3 + 3 \times 2 \\ 2 \times 2 + 2 \times 4 & 2 \times 4 + 2 \times (-1) & 2 \times 3 + 2 \times 2 \\ 6 \times 2 + 5 \times 4 & 6 \times 4 + 5 \times (-1) & 6 \times 3 + 5 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 17 & 21 \\ 12 & 6 & 10 \\ 32 & 19 & 28 \end{bmatrix}$$

- **Exemplo G.5:** Repita o Exemplo G.4 para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times (-4) + (-1) \times (-5) & 2 \times 3 + (-1) \times 2 \\ 3 \times (-4) + (-2) \times (-5) & 3 \times 3 + (-2) \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = B \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4) \times 2 + 3 \times 3 & (-4) \times (-1) + 3 \times (-2) \\ (-5) \times 2 + 2 \times 3 & (-5) \times (-1) + 2 \times (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Dos resultados dos Exemplos G.4 e G.5, concluímos que, mesmo as matrizes A e B tendo dimensões que permitam realizar os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$, esses produtos não são necessariamente iguais.

RELAÇÕES IMPORTANTES

Se A , B e C são matrizes de dimensões apropriadas e se r e s são escalares, as equações matriciais a seguir são verdadeiras:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$rA \cdot sB = (rs)(A \cdot B)$$

G.3 MATRIZ IDENTIDADE

A matriz $n \times n$ na qual todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os demais elementos são iguais a 0 é chamada de *matriz identidade* e denotada por I . Se multiplicarmos a matriz identidade por qualquer outra matriz A , $n \times n$, o resultado será a própria matriz A , isto é,

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

G.4 TRANSPOSTA DE UMA MATRIZ

A transposta de uma matriz A , denotada por A^T , é obtida trocando-se as suas linhas pelas suas colunas. Assim, se o elemento na linha i , coluna j da matriz A é a_{ij} , então $a_{ij}^T = a_{ji}$.

- **Exemplo G.6:** Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- determine a matriz $B = A^T$.

$$B = A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

G.5 INVERSA DE UMA MATRIZ

Uma matriz A , $n \times n$, é inversível se existe uma matriz B , $n \times n$, tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

Nesse caso, dizemos que a matriz B é a inversa da matriz A e denotamos por A^{-1} .

- **Exemplo G.7:** Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Observamos que $A \cdot B = B \cdot A = I$. Portanto, a matriz B é a inversa da matriz A , isto é, $B = A^{-1}$.

G.6 MATRIZES BOOLEANAS

As matrizes booleanas (em homenagem a George Boole, um matemático inglês do século XIX, criador da lógica e da álgebra booleana) são um tipo especial de matrizes nas quais os seus elementos valem 0 ou 1. Por exemplo, a matriz A é uma matriz booleana

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nesse contexto, os valores 0 e 1 são interpretados como valores lógicos ou valores booleanos. Para os valores booleanos, podem ser definidas as seguintes operações:

- multiplicação booleana: $x \wedge y = \min(x, y)$
- soma booleana: $x \vee y = \max(x, y)$

onde $\min$ e $\max$ significam, respectivamente, valor mínimo e valor máximo entre x e y .

De acordo com essas definições, podemos montar tabelas para a multiplicação e soma booleanas, conforme mostrado nas Figuras G.3 e G.4.

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Figura G.3 Multiplicação booleana.
Fonte: do Autor

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Figura G.4 Soma booleana.
Fonte: do Autor

Baseados na multiplicação booleana e na soma booleana entre valores, podemos definir a operação de multiplicação booleana entre duas matrizes A e B (matrizes booleanas com dimensões apropriadas), denotada por $A \times B$. Os elementos da matriz booleana $C = A \times B$ são dados por

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^m (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

Nós podemos também definir dois análogos da soma para as matrizes booleanas (matrizes com mesmas dimensões): $A \wedge B$, onde os elementos correspondentes são combinados usando-se a multiplicação booleana; e $A \vee B$, onde os elementos correspondentes são combinados usando-se a soma booleana.

- **Exemplo G.8:** Dadas as matrizes booleanas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

calcule $A \times B$, $A \wedge B$ e $A \vee B$.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 0 \wedge 0 & 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 \\ 1 \wedge 1 & 1 \wedge 0 & 0 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 0 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 1 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 3 \\ 1 & -9 & 2 \\ 4 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

quais são os valores dos elementos a_{11} , a_{13} , a_{22} , a_{23} , a_{31} e a_{33} ?

2. Determine os valores de r , s e t na equação matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 6 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & r-2s & 5 \\ 1 & t-2r & 3 \\ 6 & -2 & s+t \end{bmatrix}$$

3. Encontre os valores de x , y , z e t em

$$\begin{bmatrix} x+y & 2x-3y \\ z-t & z+2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Se A é uma matriz simétrica, determine os valores de x , y e z em

$$A = \begin{bmatrix} 8 & x & 2 \\ -2 & 4 & y \\ z & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

5. Com $r=4, s=-2$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

calcule as seguintes operações:

- a. $A+D$
- b. $A-D$
- c. rB
- d. $A+rD$
- e. $B \cdot D$
- f. $A \cdot C$
- g. $C^2 = C \cdot C$
- h. sC
- i. $r(sC)$
- j. $D \cdot C$
- k. $B \cdot A + D$
- l. $s(A + D)$
- m. $sA - rD$
- n. $(A \cdot C) \cdot D$

6. Para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} x & 3 \\ y & 2 \end{bmatrix}$$

calcule os valores de x e y sabendo que $A \cdot B = B \cdot A$.

7. Mostre que, para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$B = A^{-1}.$$

8. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

não é inversível.

9. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

mostre que:

- a. $(A+B)^T = A^T + B^T$
- b. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

10. Encontre duas matrizes 2×2 , A e B , de modo que $A \cdot B = 0$, porém $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

11. Para as matrizes booleanas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determine $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \times B$ e $B \times A$.

12. Para as matrizes booleanas

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \times B$ e $B \times A$.

tics

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Unidade H
**Fundamentos Matemáticos
da Computação**



ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

H.1 DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Vamos começar analisando uma forma bem conhecida de aritmética, a soma de inteiros. Existe um conjunto Z de objetos (o conjunto dos números inteiros) e uma operação binária nesses objetos (a soma). Não podemos esquecer a Unidade D do nosso Curso. Uma operação binária em um conjunto tem que ser *bem definida* (dar uma única resposta sempre que for aplicada a dois elementos do conjunto) e o conjunto tem que ser fechado em relação à operação (a resposta tem que ser um elemento do conjunto). A notação $[Z, +]$ denota o conjunto com a operação binária.

Em $[Z, +]$, uma equação do tipo

$$3 + (2 + 4) = (3 + 2) + 4$$

é válida. Em cada lado da igualdade, os inteiros permanecem na mesma ordem, mas o agrupamento desses inteiros, que indica a ordem em que são efetuadas as somas, se altera. A alteração dessa ordem, porém não influi no resultado final, que continua o mesmo.

Um outro tipo de equação que é válida em $[Z, +]$ é

$$3 + 5 = 5 + 3$$

Nesse caso, a mudança da ordem em que os inteiros são somados não altera o resultado final.

Equações do tipo

$$5 + 0 = 5$$

$$0 + 2 = 2$$

$$-32 + 0 = -32$$

também são válidas. Somar zero a qualquer inteiro não altera o valor desse inteiro.

Por fim, equações do tipo

$$5 + (-5) = 0$$

$$-10 + 10 = 0$$

também são válidas, pois somar o negativo de um inteiro a esse inteiro resulta em zero.

Essas equações representam quatro propriedades bastante frequentes com operações binárias em conjuntos.

Definições

Propriedades de Operações Binárias

Seja S um conjunto e seja Δ uma operação binária em S .

- a) A operação Δ é associativa se

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z]$$

A associatividade nos permite escrever $x \Delta y \Delta z$ sem parênteses, pois o agrupamento não é relevante.

- b) A operação Δ é comutativa se

$$(\forall x)(\forall y)(x \Delta y = y \Delta x)$$

- c) $[S, \Delta]$ tem um elemento identidade se

$$(\exists i)(\forall x)(x \Delta i = i \Delta x = x)$$

- d) Se $[S, \Delta]$ tem um elemento identidade i , então cada elemento em S tem um inverso em relação a Δ se

$$(\forall x)(\exists x^{-1})(x \Delta x^{-1} = x^{-1} \Delta x = i)$$

Grupo e Grupo comutativo

$[S, \Delta]$ é um grupo se S é um conjunto não vazio e Δ é uma operação binária em S tal que:

1. Δ é associativa;
2. existe um elemento identidade em S ;
3. cada elemento em S tem um inverso em relação a Δ .

Um grupo em que a operação Δ é comutativa é chamado de grupo comutativo. Do apresentado anteriormente, verificamos que $[Z, +]$ é um grupo comutativo com elemento identidade 0.

- **Exemplo H.1:** Seja R^+ o conjunto dos números reais positivos e $\times$ a operação de multiplicação entre dois números reais, que é uma operação binária em R^+ . Então, $[R^+, \times]$ é um grupo comutativo. A multiplicação é associativa e comutativa. O número real positivo 1 funciona como uma identidade, pois

$$x \times 1 = 1 \times x = x$$

para todo número real positivo x . Todo número real positivo x tem um inverso em relação à multiplicação, que é o número $1/x$, pois

$$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$$

- **Exemplo H.2:** Considere $M_2(\mathbb{Z})$ o conjunto de todas as matrizes 2×2 com elementos inteiros e seja $+$ a soma de matrizes. Então $+$ é uma operação binária em $M_2(\mathbb{Z})$. Portanto, $[M_2(\mathbb{Z}), +]$ é um grupo comutativo, pois os inteiros formam um grupo comutativo, de modo que cada elemento da matriz se comporta apropriadamente.

Observe que a soma de matrizes é comutativa, pois

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma identidade; e a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

é a inversa em relação à operação de soma de matrizes da matriz

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

- **Exemplo H.3:** Considere $[M_2(\mathbb{Z}), \cdot]$, onde $\cdot$ é a operação de produto matricial. Essa operação é fechada em $M_2(\mathbb{Z})$. Sabemos também, da Unidade G, que a multiplicação de matrizes é associativa. Além disso, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é um elemento identidade para a operação $\cdot$, pois

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Porém a operação do produto matricial não é comutativa e não apresenta elemento inverso pertencente ao conjunto $M_2(\mathbb{Z})$. Portanto, $[M_2(\mathbb{Z}), \cdot]$ não é um grupo.

- **Exemplo H.4:** Uma expressão da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ e $n \in \mathbb{N}$ é um *polinômio em x com coeficientes reais* (ou um *polinômio em x sobre $\mathbb{R}$*). Para cada i , a_i é o coeficiente de x_i . Se i é o maior inteiro para o qual $a_i \neq 0$ e se i é maior do que 0, então o polinômio tem *grau i* ; se não existe esse i , o polinômio tem *grau zero*. O conjunto de todos os polinômios em x sobre $\mathbb{R}$ é denotado por $\mathbb{R}[x]$.

Vamos definir a operação binária $+$ em $\mathbb{R}[x]$ como sendo a operação usual de soma de polinômios. Se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômio em $\mathbb{R}[x]$, então as somas $f(x) + g(x)$ e $g(x) + f(x)$ são iguais, pois os coeficientes são números reais e podemos usar as propriedades dos números reais para a soma.

Temos também que, se $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são polinômios em $\mathbb{R}[x]$, $(f(x) + g(x)) + h(x)$ é igual a $f(x) + (g(x) + h(x))$. O polinômio constante 0 é a identidade, pois $0 + f(x) = f(x)$, para todo $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. E, além disso, o polinômio $-f(x)$ é a inversa em relação à operação de soma de polinômios, pois $-f(x) + f(x) = f(x) + (-f(x)) = 0$.

Portanto, $[\mathbb{R}[x], +]$ é um grupo comutativo.

- **Exemplo H.5:** Em relação ao grupo $[\mathbb{R}[x], +]$ do Exemplo H.4, qual é o elemento inverso do polinômio $3x^3 - 2x^2 + 5x - 7$? É o polinômio $-3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$.

Uma forma visual de analisar se um conjunto e uma operação binária definida nesse conjunto é um grupo é através de uma tabela. Considere $[Z, +]$. A Tabela H.1 mostra as relações entre os elementos do conjunto Z em relação à operação $+$.

+	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
-3	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	...
-2	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
-1	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
0	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
1	...	-2	-1	0	1	2	3	4	...
2	...	-1	0	1	2	3	4	5	...
3	...	0	1	2	3	4	5	6	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabela H.1 - Tabela para o grupo $[Z, +]$

Para verificar a comutatividade, basta verificar se existe simetria em relação à diagonal principal da tabela.

Para determinar se existe o elemento identidade, basta verificar se, no interior da tabela, existe uma coluna que seja igual à coluna externa da tabela. Se existir, o elemento na coluna externa é a identidade. Ou, de forma alternativa, verificar se existe uma linha interna da tabela que seja igual à linha externa da tabela. Se existir, o elemento na linha externa é a identidade.

Para localizar se existe o elemento inverso, procure na linha correspondente até encontrar a coluna onde aparece a identidade; depois, verifique ainda se a mudança de ordem ainda resulta na identidade.

A propriedade associativa (ou a falta dela), no entanto, não é fácil de ser verificada através da tabela.

- **Exemplo H.6:** Considere um conjunto A e seja S_A o conjunto de todas as funções permutação $f: A \rightarrow A$. A composição de funções preserva as permutações e é associativa, a função identidade i_A é uma permutação e, qualquer que seja $f \in S_A$, a função inversa f^{-1} existe e é uma permutação. Além disso,

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i_A$$

Portanto, podemos concluir que $[S_A, \circ]$ é um grupo. Esse grupo é chamado de *grupo de permutações* de A .

- **Exemplo H.7:** Se o conjunto $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ para algum inteiro positivo n , então S_A é chamado de *grupo simétrico de grau n* e denotado por S_n .

Por exemplo, S_3 é o conjunto de todas as permutações de $\{1, 2, 3\}$. Existem seis permutações, que usando a notação de ciclos da Seção E.6.1, são:

$$\begin{array}{lll} p_1 = i & p_2 = (1, 2) & p_3 = (1, 3) \\ p_4 = (2, 3) & p_5 = (1, 2, 3) & p_6 = (1, 3, 2) \end{array}$$

Recordemos que a notação de ciclo $(1, 2)$, por exemplo, significa que 1 vai em 2, 2 vai em 1 e os elementos que não aparecem permanecem fixos. A composição $(1, 2) \circ (1, 3)$ é executada da direita para a esquerda, de modo que

Por $(1, 3)$ Por $(1, 2)$

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 3$$

$$2 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

$$3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

resultando em $(1,3,2)$. Logo, $p_2 \circ p_3 = (1,2) \circ (1,3) = (1,3,2) = p_6$. Seguindo esse procedimento, vamos construir a tabela para o grupo $[S_3, \circ]$, a qual está mostrada na Tabela H.2.

$\circ$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_2	p_2	p_1	p_6	p_5	p_4	p_3
p_3	p_3	p_5	p_1	p_6	p_2	p_4
p_4	p_4	p_6	p_5	p_1	p_3	p_2
p_5	p_5	p_3	p_4	p_2	p_6	p_1
p_6	p_6	p_4	p_2	p_3	p_1	p_5

Observando a Tabela H.2, notamos que não há simetria em relação à diagonal principal. Portanto, $[S_3, \circ]$ não é um grupo comutativo.

H.2 RESULTADOS BÁSICOS SOBRE GRUPOS

Teorema sobre a Unicidade da Identidade em um Grupo

Em qualquer grupo $[F, \Delta]$, o elemento identidade i é único.

Teorema sobre a Unicidade de Inversos em um Grupo

Para cada elemento y em um grupo $[F, \Delta]$, y^{-1} é único. Teorema sobre o Inverso de um Produto: Se x e y pertencem ao grupo $[F, \Delta]$, então $(x \Delta y)^{-1} = y^{-1} \Delta x^{-1}$.

Definição

Regras de Cancelamento: Um conjunto S munido de uma operação binária Δ satisfaz a regra de cancelamento à direita se, quaisquer que sejam $x, y, z \in S$, $x \Delta z = y \Delta z$ implica em que $x = y$. Ele satisfaz a regra de cancelamento à esquerda se, quaisquer que sejam $x, y, z \in S$, $z \Delta x = z \Delta y$ implica em que $x = y$.

Teorema sobre Cancelamento em um Grupo

Qualquer que seja o grupo $[F, \Delta]$, ele satisfaz as regras de cancelamento à direita e à esquerda.

Se $[F, \Delta]$ é um grupo, onde F é finito e possui n elementos, então n é a ordem do grupo e é denotada por $|F|$. Se F é um conjunto infinito, então o grupo tem ordem infinita.

- **Exemplo H.8:** Seja Δ uma operação binária associativa no conjunto $\{1, x, y, z, w\}$. Complete a tabela a seguir de modo a definir um grupo com identidade 1.

Δ	1	x	y	z	w
1	1				
x			z	w	1
y		z	w		
z		w		x	
w				y	z

A solução é

Δ	1	x	y	z	w
1	1	x	y	z	w
x	x	y	z	w	1
y	y	z	w	1	x
z	z	w	1	x	y
w	w	1	x	y	z

H.3 SUBGRUPOS

Definição

Subgrupo

Sejam $[F, \Delta]$ um grupo e $A \subseteq F$. Então, $[A, \Delta]$ é um subgrupo de $[F, \Delta]$ se $[A, \Delta]$ for um grupo.

Teorema sobre Subgrupos

Sejam $[F, \Delta]$ um grupo com identidade i e $A \subseteq F$. Então, $[A, \Delta]$ é um subgrupo de $[F, \Delta]$ se satisfaz as seguintes condições:

- A é fechado em relação a Δ ;
- 2. $i \in A$; 3. todo $x \in A$ tem um inverso em A .
- **Observação:** as propriedades da operação binária ser bem definida e ser associativa, de fato, não precisam ser verificadas pois, como $A \subseteq F$, A herda essas propriedades de F (F é um grupo).
- **Exemplo H.9:** Sejam $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, A o conjunto dos números inteiros pares e $+$ a operação de adição. Assim, A é fechado em relação à adição, contém 0 (o elemento identidade) e o inverso de qualquer inteiro par (seu negativo) é um inteiro também par. Logo $[A, +]$ é um subgrupo do grupo $[\mathbb{Z}, +]$.
- **Exemplo H.10:** Considere o Exemplo H.9, onde A agora é o conjunto dos números inteiros ímpares. Nesse caso, $[A, +]$ não é um grupo por várias razões. $[A, +]$ não é fechado em relação à adição, visto que a soma de dois inteiros ímpares é um inteiro par. Outro motivo é que o subgrupo deve ter uma identidade para a adição; 0 é o único inteiro que serve e 0 não é ímpar.
- **Exemplo H.11:** $[\mathbb{Z}, +]$ é um subgrupo do grupo $[\mathbb{R}, +]$.

Teorema de Lagrange

A ordem de um subgrupo de um grupo finito divide a ordem do grupo.

H.4 GRUPOS ISOMORFOS

Definição

Isomorfismo de Grupos

Sejam $[S, \Delta]$ e $[T, \square]$ grupos. Uma aplicação $f: S \rightarrow T$ é um isomorfismo de $[S, \Delta]$ em $[T, \square]$ se

1. a função f é bijetora;
2. quaisquer que sejam $x, y \in S$, $f(x \Delta y) = f(x) \square f(y)$.

A propriedade (2) significa que f é um homomorfismo.

- Exemplo H.12: Sejam os grupos $[R^+, \times]$ e $[R, +]$, $\times$ e $+$ as operações de multiplicação e adição, respectivamente, no conjunto dos números reais, b um número real positivo, $b \neq 1$, e f a função de R^+ em R definida por

$$f(x) = \log_b x$$

Prove que f é um isomorfismo.

- a) Prova:** a função f é bijetora. Temos que mostrar que a função f é injetora e sobrejetora. Vamos mostrar que f é sobrejetora: se $r \in R$, $b^r \in R^+$ e $f(b^r) = \log_b b^r = r$. Além disso, f é injetora: se $f(x_1) = f(x_2)$, então $\log_b x_1 = \log_b x_2$. Seja $p = \log_b x_1 = \log_b x_2$. Então, $b^p = x_1$ e $b^p = x_2$, logo $x_1 = x_2$.
- b) Prova:** f é um homomorfismo. Se $x_1, x_2 \in R^+$, $f(x_1 \times x_2) = \log_b (x_1 \times x_2) = \log_b x_1 + \log_b x_2 = f(x_1) + f(x_2)$. Observe que $\log_b 1 = 0$, de modo que f leva 1 (a identidade de $[R^+, \times]$) em 0 (a identidade de $[R, +]$). Observe também que

$$\log_b (1/x) = \log_b 1 - \log_b x = 0 - \log_b x = -\log_b x = -f(x)$$

De modo que f leva a inversa de x em $[R, +]$ na inversa de $f(x)$ em $[R^+, \times]$.

Finalmente, ambos os grupos são comutativos.

Assim, os dois grupos do Exemplo H.12 são isomorfos, portanto eles são essencialmente iguais e cada um deles pode ser usado para simular cálculos no outro. Por exemplo, seja $b=2$. Então, $[R, +]$ pode ser usado para simular o cálculo 64×512 em $[R^+, \times]$. Primeiro, levemos R^+ em R através da função f :

$$f(64) = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$$

$$f(512) = \log_2 512 = \log_2 2^9 = 9$$

Agora, em $[R, +]$, efetue o cálculo

$$6 + 9 = 15$$

E, finalmente, usamos f^{-1} para retornar a R^+ :

$$f^{-1}(15) = 2^{15} = 32.768$$

Observação: antigamente, quando não existiam as calculadoras eletrônicas, números muito grandes eram multiplicados usando-se tabelas de logaritmos com base 10, tal que se convertia um problema de multiplicação em um de adição.

- Exemplo H.13:** Considere o grupo $[Z, +]$ e a função $f(x)=0$.

A função f é um homomorfismo do grupo $[Z, +]$ no grupo $[Z, +]$, pois $f(x+y)=0=0+0=f(x)+f(y)$. No entanto, f não é uma função bijetora, portanto não é um isomorfismo.

- Exemplo H.14:** Considere o grupo $[Z, +]$ e a função $h(x)=x+1$.

A função h é uma função bijetora, pois $h(x)=h(y)$ implica em que $x+1=y+1$, ou seja, $x=y$, logo h é injetora; h também é sobrejetora porque, qualquer que seja $z \in Z$, $z-1 \in Z$ e $h(z-1)=z$. Porém, h não é um homomorfismo do grupo $[Z, +]$ no grupo $[Z, +]$, pois $h(x+y)=x+y+1 \neq (x+1)+(y+1)=h(x)+h(y)$. Portanto, h não é um isomorfismo.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. As operações binárias a seguir, denotadas por $\triangle$, estão definidas sobre um determinado conjunto. Quais são associativas? Quais são comutativas?

- Em $\mathbb{Z}$, $x \triangle y = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é par} \\ x+1 & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$
- Em $\mathbb{N}$, $x \triangle y = (x + y)^2$
- Em $\mathbb{R}^+$, $x \triangle y = x^4$
- Em $\mathbb{R}^+$, $x \triangle y = 1 / (x + y)$

2. A tabela abaixo define uma operação binária $\triangle$ no conjunto $\{a, b, c, d\}$. Essa operação é associativa? É comutativa?

$\triangle$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>d</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>

3. Mostre que o subconjunto

$$\begin{aligned} p_1 &= i & p_3 &= (1, 4) \circ (2, 3) \\ p_2 &= (1, 2) \circ (3, 4) & p_4 &= (1, 3) \circ (2, 4) \end{aligned}$$

forma um subgrupo do grupo simétrico S_4 .

4. Quais das funções a seguir são isomorfismos?

- De $[\mathbb{Z}, +]$ em $[\mathbb{Z}, +]$, $f(x) = 2$
- De $[\mathbb{R}, +]$ em $[\mathbb{R}, +]$, $f(x) = |x|$
- De $[\mathbb{R}^*, \times]$ em $[\mathbb{R}^*, \times]$, $f(x) = |x|$ ($\mathbb{R}^*$ é o conjunto dos números reais não nulos)

5. Seja $S = \{-1, 1\}$. Mostre que $[S, \times]$ é um grupo, onde $\times$ é a multiplicação usual de inteiros.

Tics

ÁLGEBRA DE BOOLE E LÓGICA COMPUTACIONAL

Unidade I
**Fundamentos Matemáticos
da Computação**

ÁLGEBRA DE BOOLE E LÓGICA COMPUTACIONAL

I1. ESTRUTURA DA ÁLGEBRA DE BOOLE

MODELOS E GENERALIZAÇÕES

Um exemplo notável de estrutura algébrica é a álgebra booleana ou Álgebra de Boole (George Boole), formulada inicialmente para modelar a lógica proposicional e utilizada posteriormente por Shannon (1938) para modelar circuitos eletrônicos (ou digitais).

O ponto de partida para o projeto sistemático de sistemas de processamento digital é a chamada Álgebra de Boole, trabalho de um matemático inglês que, em um livro de 1854, propõe dar expressão às leis fundamentais do raciocínio na linguagem simbólica do cálculo. Trata-se, portanto, de uma formalização matemática da lógica em sua forma mais simples, conhecida como *Lógica Proposicional*.

Essa lógica permite tratar da interpretação (isto é, atribuição de valor verdadeiro ou falso) de proposições isoladas, ou da combinação de proposições por meio de operações lógicas simples.

A proposta original de Boole estava mais próxima do que hoje se chama *álgebra elementar*, isto é, trabalhava com operações usuais, como soma e multiplicação, interpretando as expressões resultantes em termos de lógica. Por exemplo, ao identificar a multiplicação de duas variáveis x e y como uma expressão lógica de objetos que contêm ao mesmo tempo as propriedades representadas por x e por y , ele chega à necessidade da expressão $x \cdot x = x$, e daí à idéia de que só dois valores seriam válidos neste cálculo, 0 e 1.

Já o significado moderno de álgebra (ou estrutura algébrica) é bem mais abstrato, e de apresentação mais complexa. No que se segue, veremos os principais resultados deste cálculo para embasar a teoria da simplificação de operações lógicas.

Assim, a álgebra de Boole é, simplesmente, um modelo ou generalização para tratarmos com proposições lógicas que podem ser falsas ou verdadeiras, investigando-as através dos operadores booleanos (operadores lógicos).

DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Definição

Álgebra de Boole: Uma *álgebra de Boole* é um conjunto A no qual estão definidas duas operações binárias, $+$ e $\cdot$, e uma operação unária, $'$, e que contém dois elementos distintos, 0 e 1, tais que as seguintes propriedades são válidas, quaisquer que sejam $x, y, z \in A$:

1a) $x + y = y + x$	1b) $x \cdot y = y \cdot x$	(comutatividade)
2a) $(x + y) + z = x + (y + z)$	2b) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	(associatividade)
3a) $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	3b) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	(distributividade)
4a) $x + 0 = x$	4b) $x \cdot 1 = x$	(existência de elemento neutro)
5a) $x + x' = 1$	5b) $x \cdot x' = 0$	(propriedade do complemento)

A partir de agora, vamos denotar uma álgebra de Boole por $[A, +, \cdot, ', 0, 1]$.

Considere o conjunto $A = \{0, 1\}$ e defina operações binárias $+$ e $\cdot$ em A por $x + y = \max(x, y)$ e $x \cdot y = \min(x, y)$. Essas operações binárias podem ser ilustradas pelas tabelas I.1 e I.2.

1	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabela I.1 Operação binária $+$.

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela I.2 Operação binária $\cdot$.

A operação unária $'$ é descrita pela Tabela I.3.

$'$	
0	1
1	0

Tabela I.3 Operação unária $'$.

Assim, $0' = 1$ e $1' = 0$. Então, $[A, +, \cdot, ', 0, 1]$ é uma álgebra de Boole. Podemos provar as 10 propriedades da definição, verificando todos os casos possíveis. Por exemplo, para a propriedade 2a (a associatividade de $+$), temos que

$$\begin{aligned}
 (0+0)+0 &= 0+(0+0)=0 \\
 (0+0)+1 &= 0+(0+1)=1 \\
 (0+1)+0 &= 0+(1+0)=1 \\
 (0+1)+1 &= 0+(1+1)=1 \\
 (1+0)+0 &= 1+(0+0)=1 \\
 (1+0)+1 &= 1+(0+1)=1 \\
 (1+1)+0 &= 1+(1+0)=1 \\
 (1+1)+1 &= 1+(1+1)=1
 \end{aligned}$$

Para a propriedade 4b, temos que

$$\begin{aligned}
 0 \cdot 1 &= 0 \\
 1 \cdot 1 &= 1
 \end{aligned}$$

Existem muitas outras propriedades que são válidas em qualquer álgebra de Boole. Essas propriedades adicionais podem ser provadas usando as propriedades dadas na definição.

A *idempotência* da soma $x + x = x$ é válida, pois

$$x + x = (x + x) \cdot 1 = \quad (4b)$$

$$= (x + x) \cdot (x + x') = \quad (5a)$$

$$= x + (x \cdot x') = \quad (3a)$$

$$= x + 0 = \quad (5b)$$

$$= x \quad (4a)$$

Uma vez demonstrada uma propriedade na álgebra de Boole, essa pode ser usada para demonstrar outras. Na álgebra de Boole, sempre que quisermos realizar uma demonstração do tipo

$$\text{alguma expressão} = \text{alguma outra expressão}$$

podemos nos basear nas sugestões a seguir.

- Em geral, a melhor abordagem é começar com a expressão mais complexa e tentar provar que ela se reduz à expressão mais simples.
- Considere somar 0 em alguma forma (como $x \cdot x'$) ou multiplicar por 1 em alguma forma (como $x + x'$).
- Sempre se recorde da propriedade 3a, a distributividade da multiplicação em relação à soma.
- Recorde-se da idempotência da soma e da multiplicação, $x + x = x$ e $x \cdot x = x$.
- Se x é um elemento de uma álgebra de Boole, o elemento x' é chamado de complemento de x . O complemento de x satisfaz que

$$x + x' = 1 \quad \text{e} \quad x \cdot x' = 0$$

Teorema sobre a Unicidade do Complemento

Dado um elemento x em uma álgebra de Boole, se existe um elemento x_1 , tal que

$$x + x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x \cdot x_1 = 0$$

então, $x_1 = x'$.

Prova:

$$x_1 = x_1 \cdot 1 = \quad (4b)$$

$$= x_1 \cdot (x + x') = \quad (x + x' = 1)$$

$$= (x_1 \cdot x) + (x_1 \cdot x') = \quad (3b)$$

$$= (x \cdot x_1) + (x' \cdot x_1) = \quad (1b)$$

$$= 0 + (x' \cdot x_1) = \quad (x \cdot x = 0)$$

$$= (x \cdot x') + (x' \cdot x_1) = \quad (5b)$$

$$= (x' \cdot x) + (x' \cdot x_1) = \quad (1b)$$

$$= x' \cdot (x + x_1) = \quad (3b)$$

$$= x' \cdot 1 = \quad (x + x_1 = 1)$$

$$= x' \quad (4b)$$

ÁLGEBRA DE BOOLE ISOMORFA

Duas estruturas são isomorfas se existe uma bijeção (chamada de *isomorfismo*) que leva elementos de uma estrutura em elementos da outra de modo que as propriedades relevantes são preservadas. Se duas estruturas são isomorfas, cada uma delas é uma imagem espelhada da outra, com os elementos simplesmente renomeados. As duas estruturas são, essencialmente, iguais.

Suponha uma estrutura como a álgebra de Boole com operações binárias e unárias definidas em um conjunto. Então, as propriedades relevantes são como essas operações agem. Um isomorfismo tem que preservar a ação dessas operações. Cada estrutura isomorfa tem que ser idêntica no sentido de que se efetuarmos a operação e, depois, aplicarmos a função obteremos o mesmo resultado que se aplicarmos, primeiro, a função e, depois, efetuarmos a operação. A Figura I.1 ilustra essa ideia.

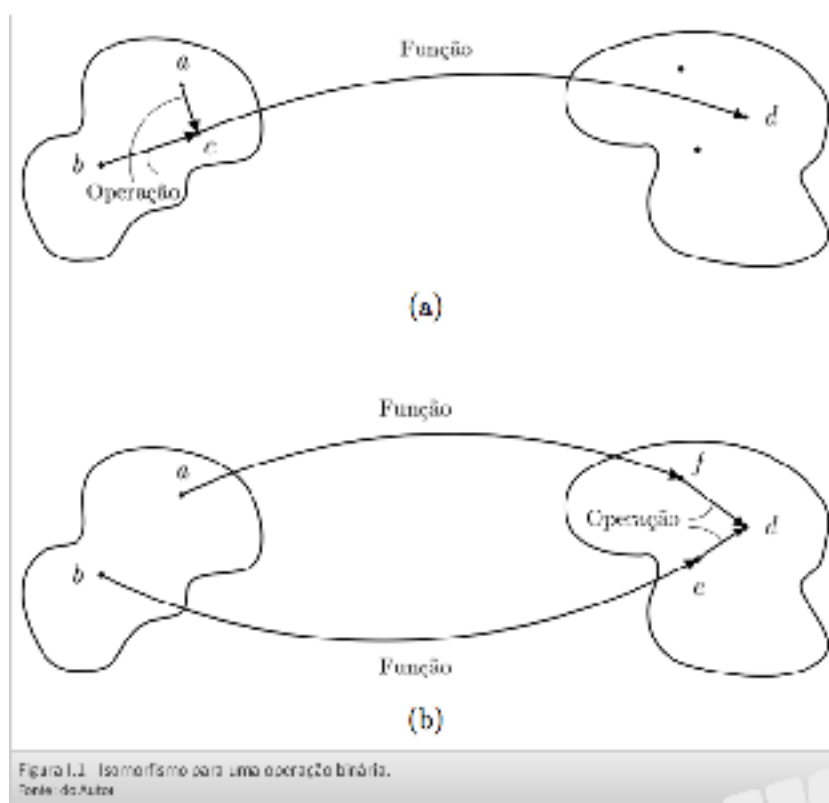


Figura I.1 Isomorfismo para uma operação binária.
Fonte: do Autor

Na Figura I.1(a), efetuamos, primeiro, a operação binária nos elementos a e b , resultando em c e, depois, c é levado em d pela função. Na Figura I.1(b), primeiro aplicamos a função em a e b , obtendo e e f , e, depois, efetuamos a operação binária em e e f , obtendo d , o mesmo elemento que anteriormente. Assim, não esqueçamos que

$$\text{efetuar a operação e aplicar a função} = \text{aplicar a função e efetuar a operação}$$

Definição

Isomorfismo entre Álgebras de Boole: Sejam $[A, +, \cdot, ', 0, 1]$ e $[a, \&, *, ', \alpha, \beta]$ álgebras de Boole. Uma função $f: A \rightarrow a$ é um *isomorfismo* de $[A, +, \cdot, ', 0, 1]$ em $[a, \&, *, ', \alpha, \beta]$ se:

- f é uma bijeção
- $f(x + y) = f(x) \& f(y)$
- $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$
- $f(x') = (f(x))'$

Teorema sobre Álgebras de Boole Finitas

Seja A uma álgebra de Boole arbitrária com n elementos. Então, $n = 2^m$ para algum m e A é isomorfa a $\wp(\{1, 2, \dots, m\})$.

O teorema acima nos fornece as informações a seguir.

- O número de elementos em uma álgebra de Boole é uma potência de 2.
- As álgebras de Boole formadas pelo conjunto das partes de um conjunto são os únicos tipos de álgebras de Boole finitas que existem.

CIRCUITOS LÓGICOS

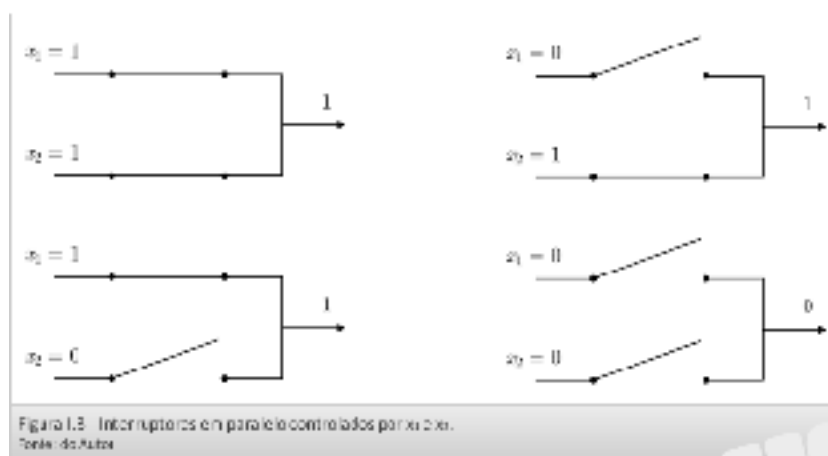
ELEMENTOS BÁSICOS DE LÓGICA

Em 1938, o matemático americano Claude Shannon percebeu a semelhança entre a lógica proposicional e a lógica de circuitos elétricos e compreendeu que álgebras de Boole poderiam ser utilizadas na interpretação desses circuitos.

Imaginemos que as voltagens em um circuito elétrico sejam de dois tipos: alta e baixa, que representaremos, respectivamente, por 1 e 0. Consideremos também a existência de interruptores no circuito de modo que um sinal igual a 1 fecha o interruptor e um sinal igual a 0 abre o interruptor (observe a Figura I.2).



Agora, vamos fazer a combinação de dois desses interruptores, controlados por x_1 e x_2 , em paralelo. A Figura I.3 apresenta os diversos casos possíveis.



Na figura I.3, observamos que valores de $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ fazem com que os dois interruptores estejam abertos, interrompendo o circuito, de modo que o nível de voltagem na saída é 0. Se um dos valores de x for 1, no entanto, um dos interruptores, ou os dois, estará fechado, resultando em uma saída 1.

A Tabela I.4 resume o comportamento do circuito.

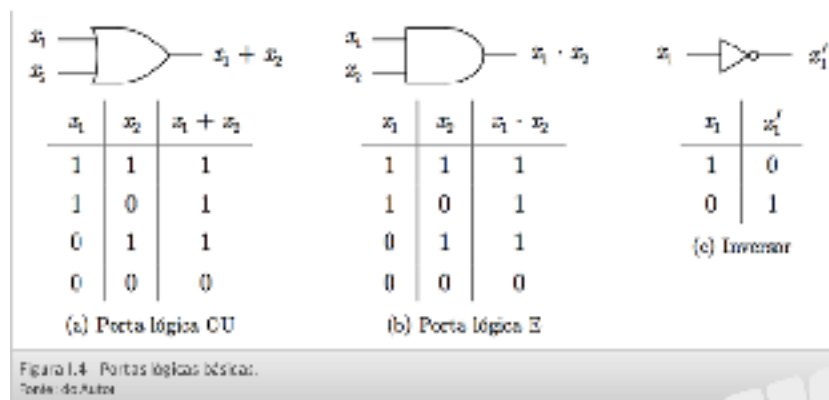
x_1	x_2	Saída
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabela I.4 Comportamento do circuito com dois disjuntores em paralelo.

Na Tabela I.4, se nós substituirmos 1 por V e 0 por F , obtemos a tabela-verdade para o conectivo lógico da disjunção. De uma forma mais geral, nós podemos considerar o circuito como sendo um dispositivo eletrônico que implementa a operação booleana $+$. Outros dispositivos implementam as operações booleanas $\cdot$ e $'$. Por exemplo, para a implementação do operador $\cdot$ seriam necessários dois interruptores associados em série, onde ambos devem estar fechados ($x_1 = 1$ e $x_2 = 1$) para se obter uma saída igual a 1.

Os dispositivos mencionados sofreram uma evolução tecnológica, passando de interruptores mecânicos para válvulas eletrônicas, depois transistores, chegando a circuitos integrados.

A *porta lógica OU*, Figura I.4(a), se comporta como a operação booleana $+$. A *porta lógica E*, Figura I.4(b), representa a operação booleana $\cdot$. A Figura I.4(c) mostra um *inversor* (negação), que corresponde à operação booleana unária $'$. Devido à associatividade das operações $+$ e $\cdot$, as portas lógicas OU e E podem ter mais de duas entradas.



EXPRESSÕES BOOLEANAS

Definição

Expressão Booleana: Uma *expressão booleana* em n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ é qualquer cadeia finita de símbolos formados aplicando-se as seguintes regras:

1. $x_1, x_2, \dots, x_n$ são expressões booleanas.
2. Se R e S são expressões booleanas, então $(R + S)$, $(R \cdot S)$ e $(R)'$ também o são.

Por convenção, o operador lógico $\cdot$ possui precedência sobre o operador $+$ e o operador $'$ tem precedência sobre os operadores $+$ e $\cdot$, de modo que $x_1 + x_2 \cdot x_3$ equivale a $x_1 + (x_2 \cdot x_3)$.

FUNÇÕES BOOLEANAS

Definição:

Função Booleana: Uma *função booleana* é uma função f tal que $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ para algum inteiro $n \geq 1$. A notação $\{0, 1\}^n$ representa o conjunto de todas as n -uplas formadas por 0 e 1. Uma função booleana, portanto, associa um valor 0 ou 1 a cada uma dessas n -uplas.

- **Exemplo 1.1:** A tabela-verdade para a operação booleana $+$ descreve uma função booleana f com $n=2$. O domínio de f é $\{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$ e $f(1,1)=1$, $f(1,0)=1$, $f(0,1)=1$ e $f(0,0)=0$. De forma semelhante, a operação booleana $\cdot$ também descreve uma função booleana com $n=2$ e a operação booleana $'$ descreve uma função booleana com $n=1$.

Qualquer expressão booleana define uma única função booleana. Veja o exemplo a seguir.

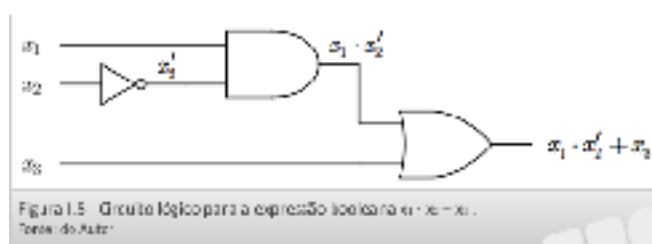
- **Exemplo 1.2:** A expressão booleana $x_1 \cdot x_2' + x_3$ define a função booleana dada na tabela-verdade da Tabela I.5.

x_1	x_2	x_3	x_2'	$x_1 \cdot x_2'$	$x_1 \cdot x_2' + x_3$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0

CIRCUITOS E EXPRESSÕES

Combinando as portas lógicas E, OU e inversores, podemos construir um circuito lógico que representa uma expressão booleana dada e produz a mesma função booleana que a expressão.

- **Exemplo 1.3:** O circuito lógico para a expressão booleana do Exemplo 1.2 está apresentado na Figura I.5.

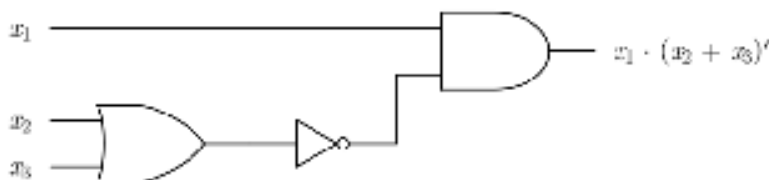


- **Exemplo 1.4:** Desenhe os circuitos lógicos para as expressões booleanas:

a) $x_1 + x_2'$



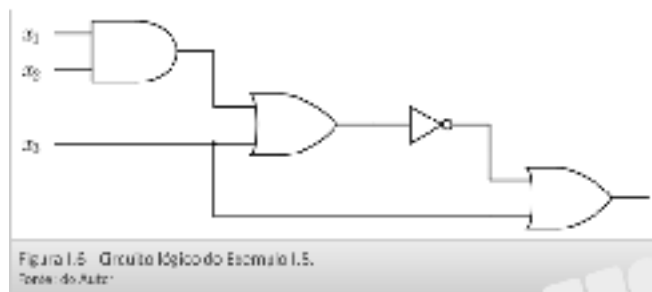
b) $x_1 \cdot (x_2 + x_3)'$



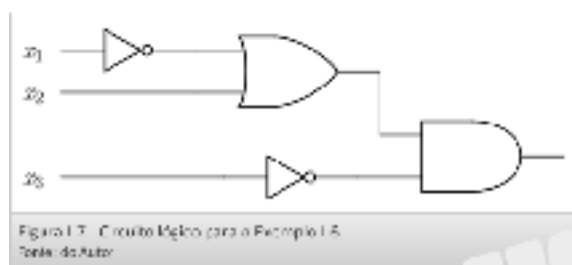
Reciprocamente, se tivermos um circuito lógico, podemos construir uma expressão booleana que possua a mesma função booleana.

- **Exemplo 1.5:** A expressão booleana para o circuito lógico da Figura 1.6 é

$$(x_1 \cdot x_2 + x_3)' + x_3$$



- **Exemplo 1.6:** Escreva uma função booleana para o circuito lógico da Figura 1.7.



A função booleana para o circuito lógico da Figura 1.7 é $(x'_1 + x_2) \cdot x'_3$.

- **Exemplo 1.7:** Escreva a função booleana em forma de tabela-verdade para o circuito lógico do Exemplo 1.6.

x_1	x_2	x_3	x'_1	$x'_1 + x_2$	x_3	$(x'_1 + x_2) \cdot x'_3$
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Circuitos lógicos construídos com portas lógicas E, OU e inversores são conhecidos como *circuitos combinatórios*. Podemos resumir as características desses circuitos como:

1. As linhas de entrada e saída estão ligadas apenas por portas lógicas.
2. As linhas podem se separar para servir de entrada a mais de uma porta lógica.
3. Não existem circuitos de realimentação, isto é, a saída de uma porta lógica nunca pode servir de entrada para essa mesma porta.
4. A saída de um circuito é uma função instantânea das entradas, ou seja, qualquer alteração que ocorra em, pelo menos, uma das entradas, implicará em imediata alteração da saída do circuito.

FORMAS NORMAIS

Até o momento, o nosso conhecimento de lógica combinacional nos permite:

- escrever uma única função booleana para um circuito ou expressão;
- dada uma expressão booleana, sabemos encontrar um circuito lógico que tenha a mesma função booleana;
- dada uma expressão booleana, sabemos construir um circuito lógico que a implemente.

Agora, estaremos interessados em obter uma expressão booleana (e, portanto, um circuito lógico) a partir de uma função booleana.

Suponha que queiramos determinar uma expressão booleana para a função booleana f dada na Tabela I.6.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Tabela I.6 Tabela-verdade para a função f .

A tabela-verdade possui quatro linhas onde f é igual a 1 (linhas 1, 3, 4 e 7). A forma básica de nossa expressão vai ser uma soma de quatro termos, $() + () + () + ()$, de modo que o primeiro termo somente é 1 para os valores da linha 1 e para nenhum outro valor. O segundo termo somente é 1 para os valores da linha 3 e para nenhum outro valor; e assim por diante. Dessa forma, a expressão toda é igual a 1 para os valores indicados das variáveis e para nenhum outro valor (isso é exatamente o que queremos). Quaisquer outros valores nas variáveis de entrada tornarão cada termo nulo e isso implicará em saída também nula.

Cada termo na soma será do tipo $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$, onde α é x_1 ou x'_1 , β é x_2 ou x'_2 e γ é x_3 ou x'_3 . Se o valor de x_i , $i=1,2,3$, na linha em que o valor da função é 1 for 1, usamos o próprio x_i ; caso o valor de x_i nessa linha seja 0, nós usamos x'_i . Esses valores irão fazer com que o termo $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ seja 1 para essa linha e 0 para todas as outras. Assim, temos

$$\text{linha 1: } x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$\text{linha 3: } x_1 \cdot x'_2 \cdot x_3$$

$$\text{linha 4: } x_1 \cdot x'_2 \cdot x'_3$$

$$\text{linha 7: } x'_1 \cdot x'_2 \cdot x_3$$

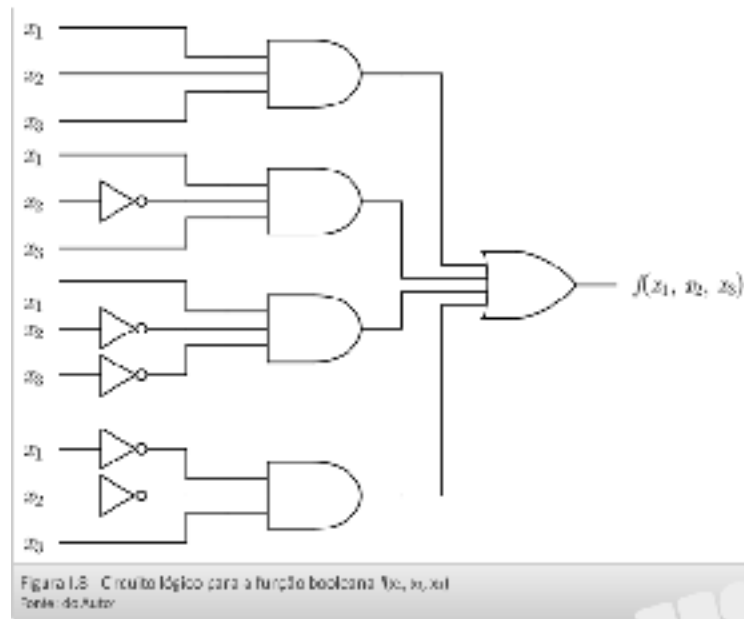
Portanto, a expressão final é

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x'_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x'_2 \cdot x'_3) + (x'_1 \cdot x'_2 \cdot x_3)$$

O procedimento descrito, sempre nos conduzirá a uma expressão para a função que é uma soma de produtos, conhecida como *forma normal disjuntiva* ou *forma canônica em soma de produtos* para a função booleana.

Como qualquer expressão booleana possui um circuito lógico correspondente, qualquer função booleana possui um circuito lógico que a implementa. A Figura I.8 mostra o circuito lógico associado à forma

normal disjuntiva da função booleana $f(x_1, x_2, x_3)$.



- **Exemplo 1.8:** Considere a tabela-verdade da Tabela 1.7.

x_1	x_2	x_3	$g(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Tabela 1.7 Tabela-verdade para a função booleana g do Exemplo 1.8.

- a) Determine a forma normal disjuntiva para a função booleana $g(x_1, x_2, x_3)$.

Observemos que as linhas que possuem o valor 1 para a função g e as suas respectivas entradas na forma $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ são:

linha 1: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

linha 3: $x_1 \cdot x_2' \cdot x_3$

linha 4: $x_1 \cdot x_2' \cdot x_3'$

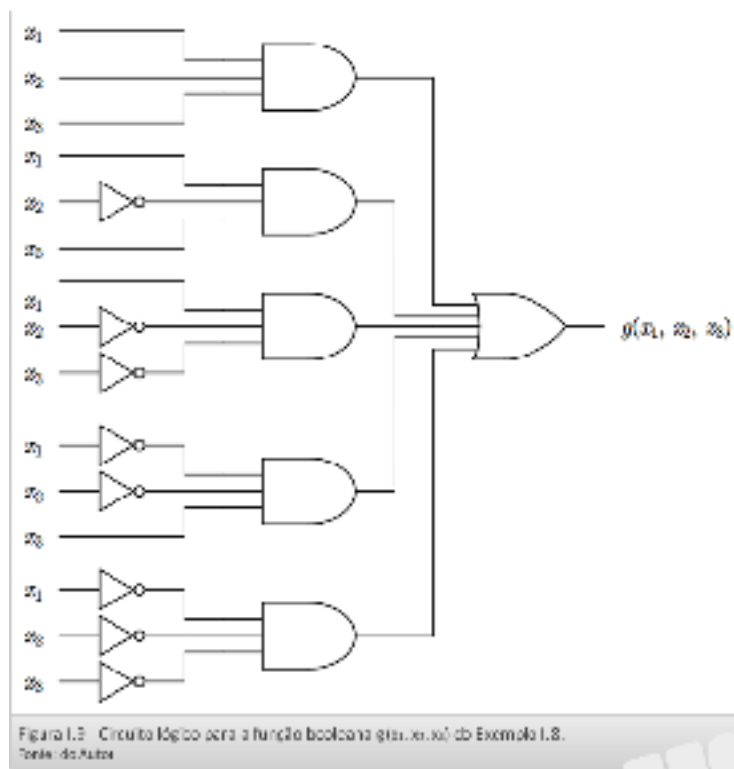
linha 7: $x_1' \cdot x_2' \cdot x_3$

linha 8: $x_1' \cdot x_2' \cdot x_3'$

Então, podemos escrever a expressão booleana para a função $g(x_1, x_2, x_3)$ como

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_2' \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_2' \cdot x_3') + (x_1' \cdot x_2' \cdot x_3) + (x_1' \cdot x_2' \cdot x_3')$$

- b) Construa o circuito lógico que a implemente. A Figura I.9 mostra o circuito lógico que implementa a função booleana g .



MINIMIZAÇÃO

Uma determinada função booleana pode ser representada por mais de uma expressão booleana e, portanto, por mais de um circuito lógico composto por portas lógicas E, OU e inversores.

Definição

Expressões Booleanas Equivalentes: Duas expressões booleanas são *equivalentes* se correspondem às mesmas funções lógicas.

Quando estamos pensando em implementar um circuito lógico associado a uma função booleana, queremos encontrar o circuito mais simples possível (com a menor quantidade de portas lógicas). Para reduzir uma expressão booleana a outra equivalente mais simples, nós podemos usar as propriedades da álgebra de Boole, visto que elas expressam equivalência de expressões booleanas. Por exemplo, se X é uma expressão booleana contendo um termo do tipo $x_1 + x_2 \cdot x_3$ e Y é a expressão obtida de X substituindo $x_1 + x_2 \cdot x_3$ pela expressão equivalente $(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3)$, então X e Y são equivalentes.

- **Exemplo I.9:** Anteriormente, nós determinamos a forma normal disjuntiva para a função booleana f dada pela Tabela I.6. Reduza a expressão de f a uma forma mais simples.
A forma normal disjuntiva encontrada foi

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2' \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2' \cdot x_3' + x_1' \cdot x_2' \cdot x_3$$

Usando as propriedades da álgebra de Boole, podemos reduzir $f(x_1, x_2, x_3)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2' \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2' \cdot x_3' + x_1 \cdot x_2' \cdot x_3 + x_1' \cdot x_2' \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2' \cdot x_3 = \\
 &= x_1 \cdot x_3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_2' + x_1 \cdot x_2' \cdot x_3' + x_1 \cdot x_2' \cdot x_3 + x_2' \cdot x_3 \cdot x_1' + x_2' \cdot x_3 \cdot x_1 = \\
 &= x_1 \cdot x_3 \cdot (x_2 + x_2') + x_1 \cdot x_2' \cdot (x_3' + x_3) + x_2' \cdot x_3 \cdot (x_1' + x_1) = \\
 &= x_1 \cdot x_3 \cdot 1 + x_1 \cdot x_2' \cdot 1 + x_2' \cdot x_3 \cdot 1 = \\
 &= x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2' + x_2' \cdot x_3
 \end{aligned}$$

As propriedades da álgebra de Boole utilizadas foram, de acordo com a Seção I.1.2:

- da função original para a linha 1: idempotência
- da linha 1 para a linha 2: comutatividade (2b)
- da linha 2 para a linha 3: distributividade (3b)
- da linha 3 para a linha 4: complemento (5a)
- da linha 4 para a linha 5: elemento neutro (4b)

Assim, a função $f(x_1, x_2, x_3)$ pode ser implementada mais simplesmente pelo circuito lógico mostrado na Figura I.10.

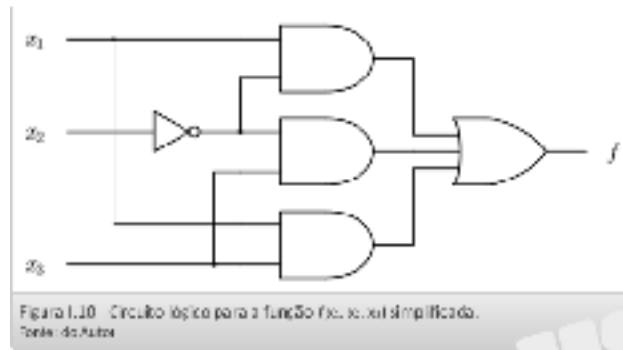


Figura I.10 Circuito lógico para a função $f(x_1, x_2, x_3)$ simplificada.
Fonte: do Autor

Para percebermos, de uma forma mais clara, a simplificação realizada, compare as Figuras I.8 (circuito original) e Figura I.10 (circuito simplificado).

- **Exemplo I.10:** Simplifique a função $g(x_1, x_2, x_3)$ do Exemplo I.8.

No Exemplo I.8, encontramos a forma normal disjuntiva da função $g(x_1, x_2, x_3)$ como

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2' \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2' \cdot x_3' + x_1' \cdot x_2' \cdot x_3 + x_1' \cdot x_2' \cdot x_3'$$

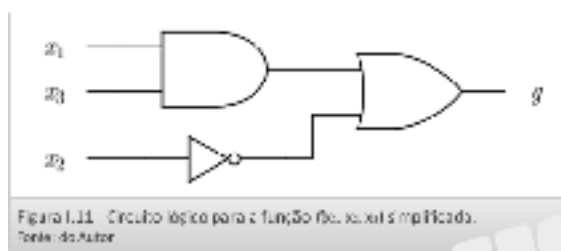
a qual pode ser reduzida como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}
 g(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2' \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2' \cdot x_3' + x_1' \cdot x_2' \cdot x_3 + x_1' \cdot x_2' \cdot x_3' = \\
 &= x_1 \cdot x_3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_2' + x_1 \cdot x_2' \cdot x_3 + x_1' \cdot x_2' \cdot x_3 + x_1' \cdot x_2' \cdot x_3' = \\
 &= x_1 \cdot x_3 \cdot (x_2 + x_2') + x_1 \cdot x_2' \cdot (x_3 + x_3') + x_1' \cdot x_2' \cdot (x_3 + x_3') = \\
 &= x_1 \cdot x_3 \cdot 1 + x_1 \cdot x_2' \cdot 1 + x_1' \cdot x_2' \cdot 1 = \\
 &= x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2' + x_1' \cdot x_2' = \\
 &= x_1 \cdot x_3 + x_2' \cdot x_1 + x_2' \cdot x_1' = \\
 &= x_1 \cdot x_3 + x_2' \cdot (x_1 + x_1') = \\
 &= x_1 \cdot x_3 + x_2' \cdot 1 = \\
 &= x_1 \cdot x_3 + x_2'
 \end{aligned}$$

As propriedades booleanas utilizadas na simplificação foram, sequencialmente:

- da função original para a linha 1: idempotência
- da linha 1 para a linha 2: comutatividade (1b)
- da linha 2 para a linha 3: distributividade (3b)
- da linha 3 para a linha 4: complemento (5a)
- da linha 4 para a linha 5: elemento neutro (4b)
- da linha 5 para a linha 6: comutatividade (1b)
- da linha 6 para a linha 7: distributividade (3b)
- da linha 7 para a linha 8: complemento (5a)
- da linha 8 para a linha 9: elemento neutro (4b)

A implementação da função $g(x_1, x_2, x_3)$ simplificada está mostrada na Figura I.11.



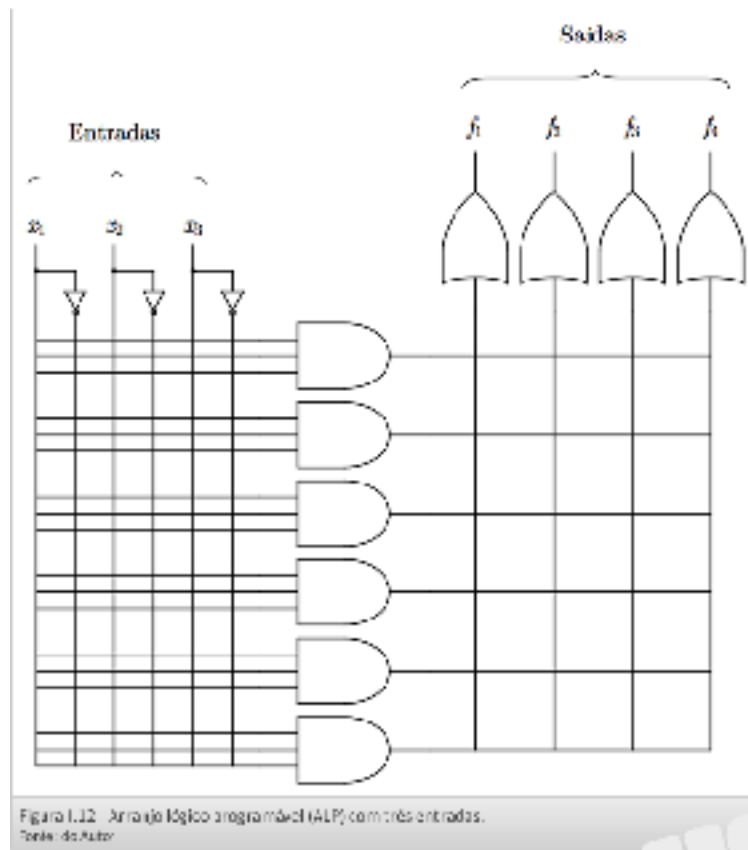
Para uma visualização e compreensão mais claras, compare as Figuras I.9 e I.11.

Caro Aluno, conforme vimos nos Exemplos I.9 e I.10, é possível minimizar uma função booleana com a utilização das propriedades da álgebra de Boole. Porém, observe que, para isso, é necessário uma certa dose de criatividade por parte do projetista de circuitos lógicos. Isso faz com que essa forma de minimização não seja frequentemente utilizada. Na sequência do seus estudos no Curso, você aprenderá uma forma bem mais eficiente de se realizar minimizações em funções booleanas, conhecida como mapas de Karnaugh.

ARRANJOS LÓGICOS PROGRAMÁVEIS

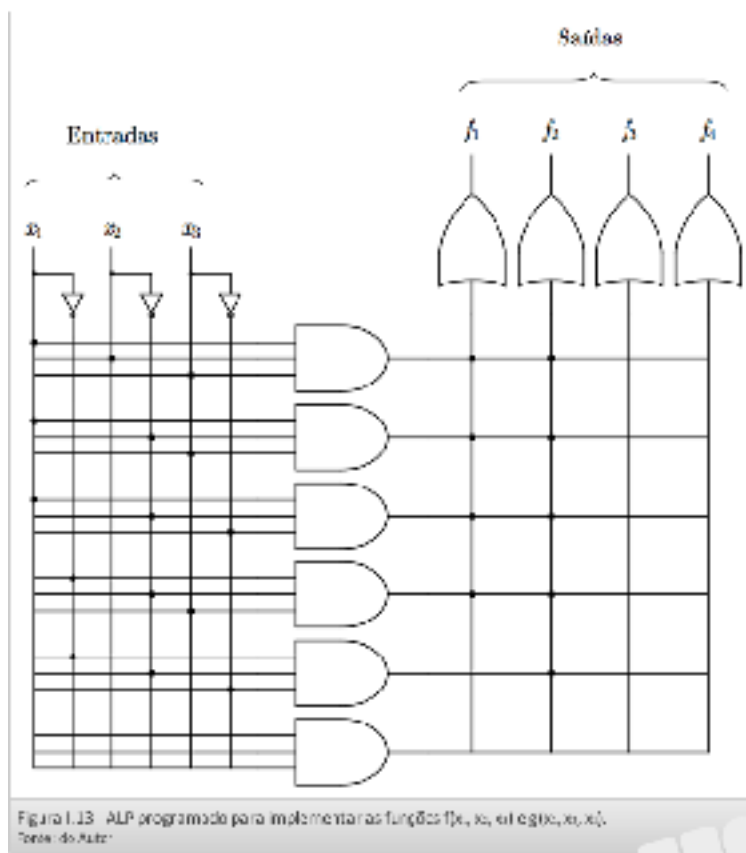
Um projetista de circuitos integrados, muitas vezes, prefere ao invés de projetar um *chip* específico para implementar uma determinada função booleana, utilizar um *ALP* (arranjo lógico programável ou, do inglês, *PLA* – programmable logic array). Um *ALP* é um *chip* que já possui em sua estrutura um arranjo de portas lógicas E e OU, junto com um reticulado retangular de fiação e algumas funções inversoras. Uma vez definida a função booleana em forma normal disjuntiva, interliga-se os componentes necessários do *ALP*.

A Figura I.12 ilustra um *ALP* para três entradas x_1 , x_2 e x_3 .



No *ALP* da Figura I.12, observe a existência de quatro linhas de saída, portanto, é possível a implementação de até quatro funções booleanas nesse *ALP*. Ao se programar o *ALP*, as linhas horizontais entrando em uma porta E selecionam algumas das variáveis de entrada e, assim, a porta E forma o produto entre essas variáveis. Por outro lado, as linhas verticais que entram em uma porta OU selecionam, quando programadas – conectadas, as saídas das portas E realizando, assim, a soma dessas saídas e resultando na função booleana desejada.

A Figura I.13 mostra como fica a programação do *ALP* da Figura I.12 para as funções booleanas $f(x_1, x_2, x_3)$ e $g(x_1, x_2, x_3)$ discutidas anteriormente. A função booleana f corresponde à saída f_1 e a função g , a saída f_2 .



LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Considere o conjunto $X = \{0, 1, x, x'\}$ e sejam $+$ e $\cdot$ operações binárias em X . A operação unária $'$ é definida pela tabela

$'$	
0	1
1	0
x	x'
x'	x

$[X, +, \cdot, ', 0, 1]$ é uma álgebra de Boole. Usando as propriedades válidas para qualquer álgebra de Boole, complete as tabelas a seguir que definem as operações binárias $+$ e $\cdot$.

$+$	0	1	x	x'
0				
1				
x				
x'				

$\cdot$	0	1	x	x'
0				
1				
x				
x'				

2. Prove as propriedades a seguir para álgebras de Boole. Justifique cada passo.

- $(x + y)' = x' \cdot y'$
- $(x \cdot y)' = x' + y'$
- $x + (x \cdot y) = x$
- $x \cdot (x + y) = x$
- $x \cdot [y + (x \cdot z)] = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
- $x + [y \cdot (x + z)] = (x + y) \cdot (x + z)$
- $(y' \cdot x) + x + (y + x) \cdot y' = x + (y' \cdot x)$
- $(x + y \cdot x)' = x'$
- $x \cdot y + x' = y + x' \cdot y'$

3. Uma operação binária $\oplus$ em uma álgebra de Boole (OU Exclusivo, *XOR* em inglês) é definida por $a \oplus b = a \cdot b' + b \cdot a'$

Prove que:

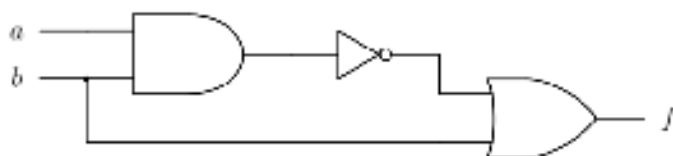
- $a \oplus b = b \oplus a$
- $a \oplus a = 0$
- $0 \oplus a = a$
- $1 \oplus a = a'$

4. Construa circuitos lógicos para as expressões booleanas a seguir usando portas lógicas E, OU e inversores.

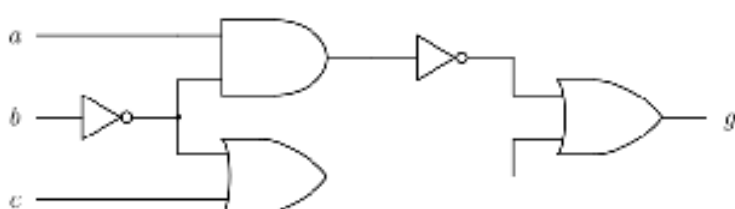
- $f = (x + y') \cdot z$
- $g = (x + y)' + y \cdot z'$
- $h = x \cdot y' + (x \cdot y)'$
- $k = (x + y)' \cdot z + y'$

5. Escreva uma expressão booleana e a tabela-verdade correspondente para os circuitos lógicos a seguir.

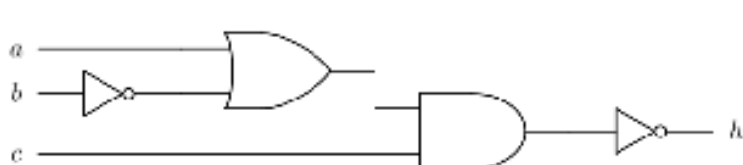
a.



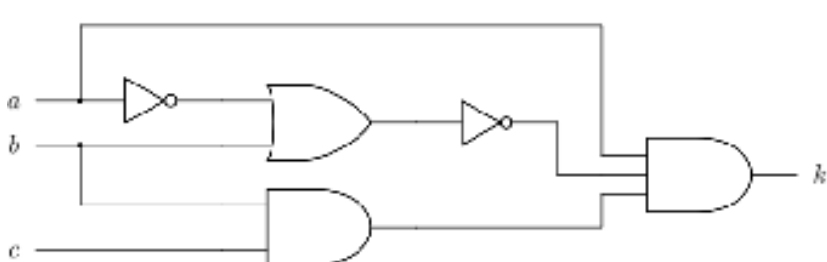
b.



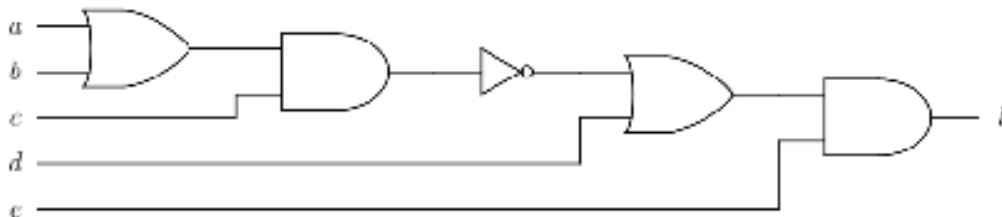
c.



d.



e.



6. Para as tabelas-verdade a seguir, determine a forma normal disjuntiva para as funções booleanas e construa os circuitos lógicos correspondentes.

a.

x_1	x_2	x_3	$g(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

b.

x_1	x_2	x_3	$g(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

c.

a	b	c	d	$f(a, b, c, d)$
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

d.

a	b	c	d	$f(a, b, c, d)$
1	1	1	1	0
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0

e.

a	b	c	d	$f(a, b, c, d)$
1	1	1	1	1
1	1	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

7. Para as funções booleanas a seguir,

- determine a forma normal disjuntiva;
- construa o circuito lógico correspondente;
- usando as propriedades da álgebra de Boole, reduza a expressão para uma expressão equivalente cujo circuito lógico use apenas dois elementos lógicos.

7.1

x_1	x_2	x_3	$g(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

7.2

x_1	x_2	x_3	$g(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

8. Prove que as expressões booleanas

$$(x_1 + x_2) \cdot (x_1' + x_3) \cdot (x_2 + x_3) \quad \text{e} \quad (x_1 \cdot x_3) + (x_1' \cdot x_2)$$

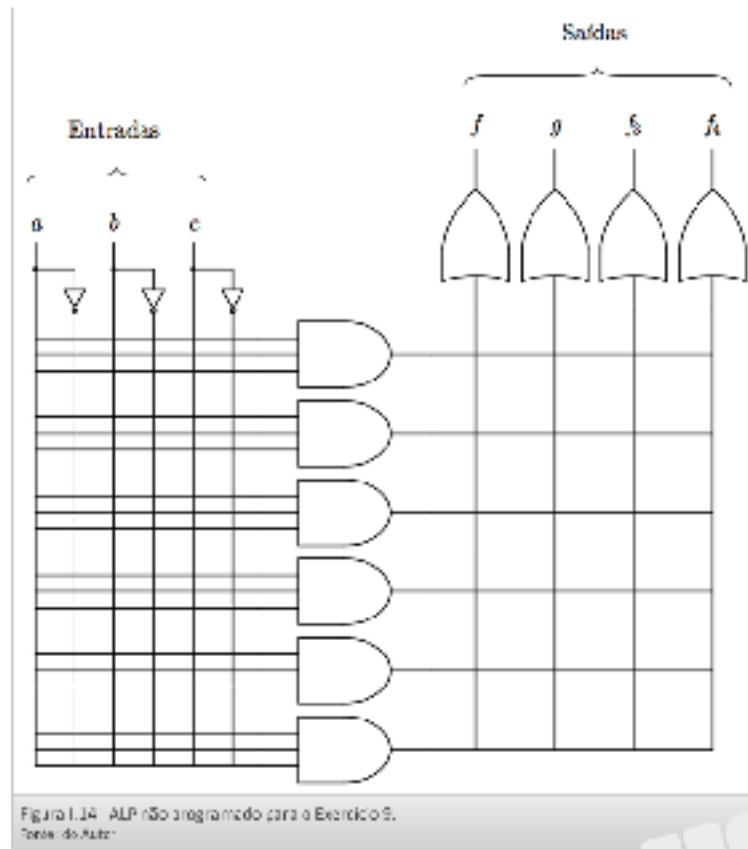
são equivalentes:

- montando a tabela-verdade para cada uma delas;
- usando as propriedades da álgebra de Boole.

9. A Figura I.14 mostra um ALP não programado para três variáveis de entrada a , b e c . Programe esse ALP para implementar as funções booleanas f e g dadas por

$$f = a \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot c' + a' \cdot b' \cdot c$$

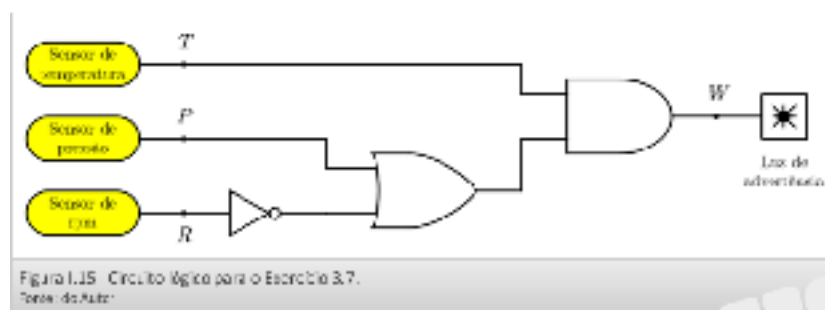
$$g = a \cdot b' \cdot c' + a' \cdot b \cdot c + a' \cdot b' \cdot c'$$



10. Um avião a jato emprega um sistema de monitoração dos valores de rpm, pressão e temperatura dos seus motores usando sensores que operam conforme descrito a seguir:

- saída do sensor $R = 0$ apenas quando a velocidade for < 4.800 rpm
- saída do sensor $P = 0$ apenas quando a pressão for $< 1,33 \text{ N/m}^2$
- saída do sensor $T = 0$ apenas quando a temperatura for $< 93,3^\circ \text{C}$

A Figura I.15 mostra o circuito lógico que controla uma lâmpada de advertência dentro da cabine para certas combinações de condições dos motores. Admita que um nível ALTO na saída W ative a luz de advertência. Determine quais condições dos motores indicam um sinal de advertência ao piloto.



11. O ônibus espacial é controlado por três computadores de bordo. Os resultados desses três computadores são comparados e é necessário que a maioria dos computadores esteja de acordo para que determinadas ações sejam executadas. Encontre uma função booleana, uma expressão booleana e um circuito lógico que tem como saída a maioria dos três valores de entrada.