TICs

Cálculo Vetorial

Estudo da Reta

Prof. Vasco Ricardo Aquino da Silva

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
SEED/MEC

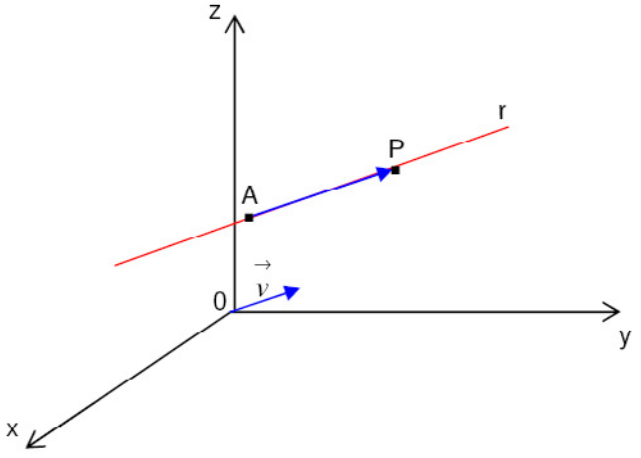
CAPES

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE

Estudo da Reta

1. Equação Vetorial da Reta "r"

Consideremos a reta "r" que passa pelo ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem a direção do vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$



Sendo um ponto qualquer $P(x, y, z)$ (variável) de "r" temos:

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}, \quad t \in IR$$

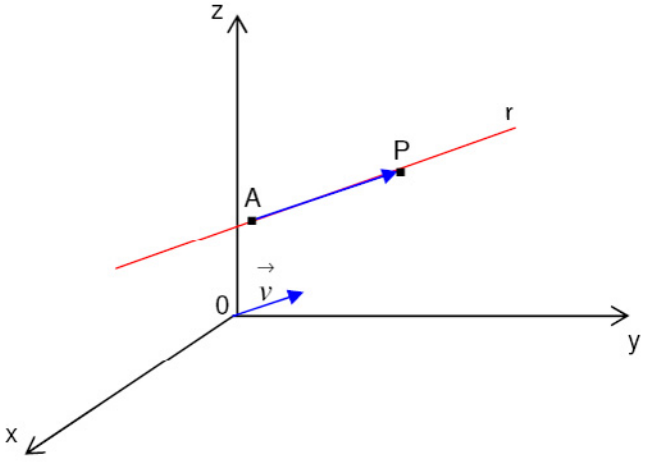
ou equivalentemente

Estudo da Reta

$$P = A + t\vec{v},\ t \in IR$$

Parâmetro

Vetor diretor de r



$$(x, y, z) = (x_0,\ y_0, z_0) + t(a, b, c),\ t \in IR$$

$$(x, y, z) = (x_0 + at,\ y_0 + bt, z_0 + ct),\ t \in IR$$

Estudo da Reta

Exemplo: Determine a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto A(3,0,-5) e tem a direção do vetor

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

$$(x, y, z) = (3, 0, -5) + t(2, 2, -1),\ t \in IR$$

$$(x, y, z) = (3 + 2t,\ 2t, -5 - t),\ t \in IR$$

Atribuindo valores reais para o parâmetro t obtemos pontos de da reta “r”:

$$t = -2 \Rightarrow (-1, -4, -3) \in r$$

$$t = -1 \Rightarrow (1, -2, -4) \in r$$

$$t = 1/2 \Rightarrow (4, 1, -11/2) \in r$$

$$t = 3 \Rightarrow (9, 6, -8) \in r$$

2. Equações Paramétricas da Reta "r"

Da equação: $(x, y, z) = (x_0 + at,\ y_0 + bt, z_0 + ct),\ t \in IR$

Obtemos:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt\ ,\ t \in IR \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Exemplo: Determine as equações paramétricas da reta r, que passa pelo ponto A(3,-1,2) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-3,-2,1)$.

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

3. Reta Definida por Dois Pontos

A reta definida pelos pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ é a reta que passa pelo ponto A (ou B) e tem a direção do vetor $\vec{v} = \vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Exemplo: Determine as equações da reta r que passam pelos pontos *A*(1,-2,-3) e *B*(3,1,-4).

Vetor direção: $\vec{v} = B - A$

$\vec{v} = (3,1,-4) - (1,-2,-3)$

$\vec{v} = (2,3,-1)$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

4. Equações Simétricas da Reta

Das equações paramétricas $\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$, supondo vem: $t = \dfrac{x - x_1}{a}$ $t = \dfrac{y - y_1}{b}$ $t = \dfrac{z - z_1}{c}$

Logo: $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$.

Estas equações são denominadas equações simétricas de uma reta que passa por um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Estudo da Reta

Exemplo: Determine as equações simétricas da reta que passa pelo ponto *A*(3,0,-5) e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-1}$$

Se desejarmos obter outros pontos da reta, basta atribuir um valor qualquer a uma das variáveis. Por exemplo, para x=1, tem-se:

$$\frac{1-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-1} \quad \Rightarrow \quad y = -2 \;\; e \;\; z = -4$$

Portanto, o ponto (1,-2,-4) pertence à reta.

5. Equações Reduzidas da Reta

Às equações simétricas da reta $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ pode-se dar outra forma, isolando as variáveis y e z e expressando-as em função de x.

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\Rightarrow y=mx+n$$

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{z-z_1}{c}\Rightarrow z=px+q$$

Estas, são as equações reduzidas da reta

Estudo da Reta

Exemplo: Estabeleça as equações reduzidas da reta r que passa pelos pontos *A*(2,1,-3) e *B*(4,0,-2).

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

$$\vec{v} = (2,-1,1)$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{1}$$

$$y = \frac{-x+4}{2} \qquad e \qquad z = \frac{x-8}{2}$$

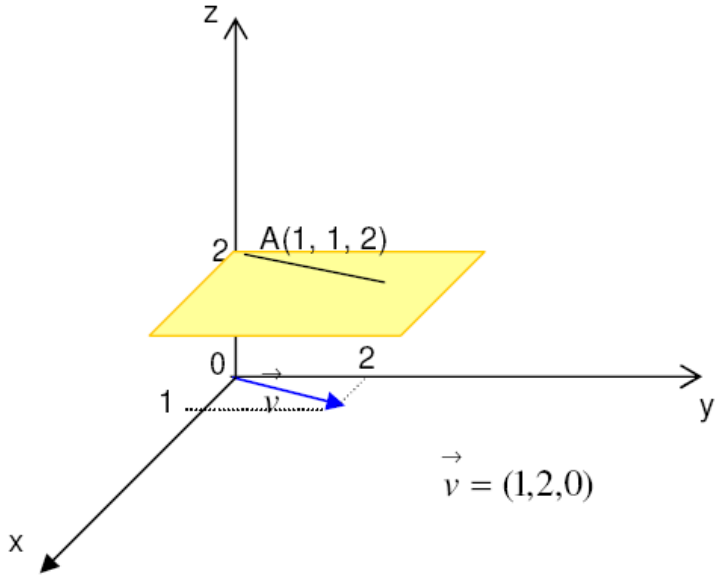
Todo ponto $P \in r$ é do tipo $P = (x, \frac{-x+4}{2}, \frac{x-8}{2})$ onde x pode assumir um valor qualquer.

Por exemplo, se fizermos x=0 teremos o ponto P(0,2,-4) de r.

6. Retas Paralelas aos Planos Coordenados

Uma reta é paralela a um dos planos xOy, xOz ou yOz se seus vetores diretores forem paralelos ao correspondente plano.

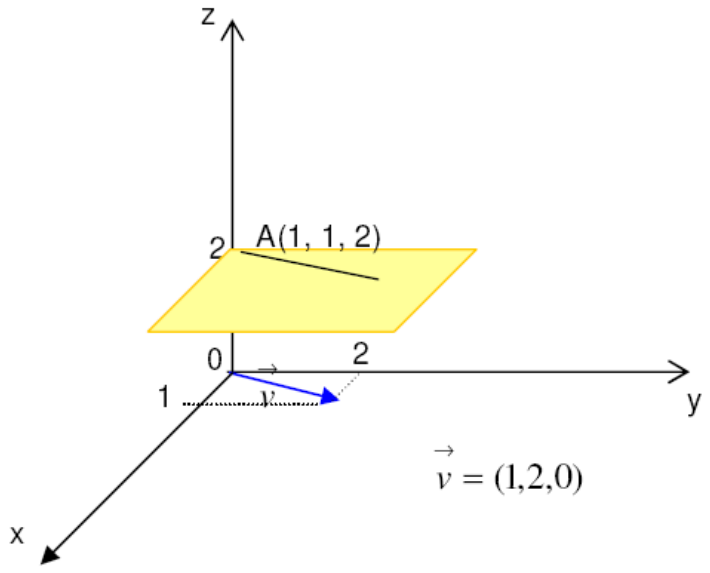
Observe o gráfico abaixo:



Estudo da Reta

A equação vetorial da reta r, paralela a v que passa pelo ponto A é (x,y,z) = (1, 1, 2) + t(1, 2, 0),logo, as equações paramétricas de r são

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 \end{cases}$$



Observe que todos os pontos de r são do tipo (x, y, 2) e o vetor direção tem a 3ª componente nula.

Estudo da Reta

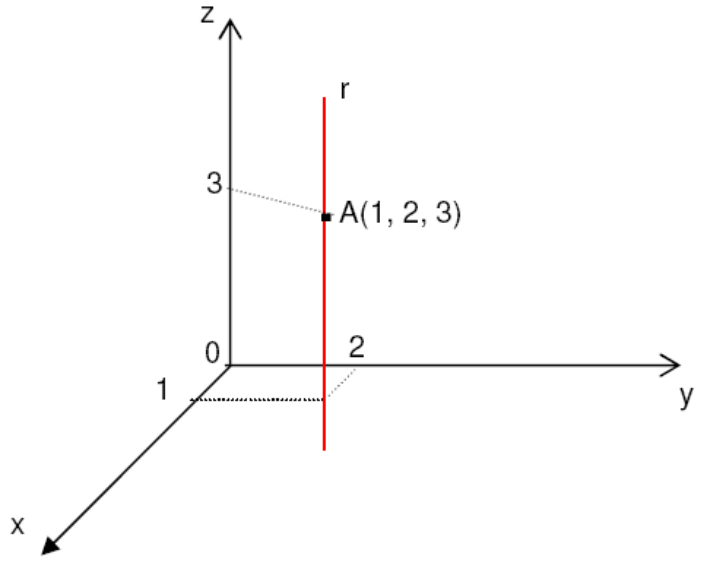
- Quando a 3ª componente do vetor direção for nula a reta será paralela ao plano xOy.

Da mesma forma:

- Quando a 2ª componente do vetor direção for nula a reta será paralela ao plano xOz.
- Quando a 1ª componente do vetor direção for nula a reta será paralela ao plano yOz.

Retas Paralelas aos Eixos Coordenados

Observe o gráfico abaixo:



a. Qual seria o vetor direção da reta r?

$$\vec{v} = (0,0,1)$$

b. Escreva suas equações paramétricas:

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 3 + t$$

Logo, todos os pontos da reta são do tipo (1,2,3+t).

Estudo da Reta

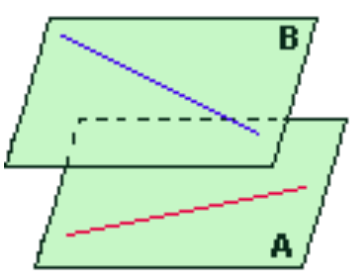
Resumindo:

Quando duas das componentes do vetor direção forem nulas a reta será paralela a um dos eixos cartesianos.

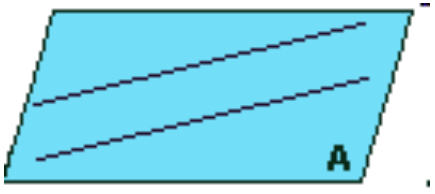
Vetor direção	r é paralela
(x,0,0)	ao eixo x
(0,y,0)	ao eixo y
(0,0,z)	ao eixo z

Estudo da Reta

Retas reversas: Duas retas são ditas reversas quando uma não tem interseção com a outra e elas não são paralelas. Isto significa que elas estão em planos diferentes. Pode-se pensar de uma reta r desenhada no chão de uma casa e uma reta s, não paralela a r, desenhada no teto dessa mesma casa.



Retas paralelas: Duas retas são paralelas se elas não possuem interseção e estão em um mesmo plano.



Estudo da Reta

Exemplo: Calcule o ângulo entre as retas

$$\begin{cases} r_1 : \dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1} \\ r_2 : \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = -1-2t \end{cases} \end{cases}$$

$$\vec{v_1} = (-2,1,1) \qquad \vec{v_2} = (1,1,-2)$$

$$\cos\theta = \frac{\left|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}\right|}{\left|\vec{v_1}\right| \cdot \left|\vec{v_2}\right|} = \frac{|(-2,1,1)\cdot(1,1,-2)|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{|-2+1-2|}{\sqrt{36}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60°$$

Condição de paralelismo de duas retas

A condição de paralelismos das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores diretores de r_1 e r_2.

$$\overrightarrow{v_1} = \alpha . \overrightarrow{v_2} \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Verifique se a reta r_1, que passa pelos pontos A_1 (-3,4,2) e B_1 (5,-2,4), e a reta r_2, que passa pelos pontos A_2 (-1,2,-3) e B_2 (-5,5,-4), são paralelas.

$$\overrightarrow{v_1} = (8,-6,2)$$

$$\overrightarrow{v_2} = (-4,3,-1)$$

$$\frac{8}{-4} = \frac{-6}{3} = \frac{2}{-1} \Rightarrow r_1 // r_2$$

Condição de ortogonalidade de duas retas

A condição de ortogonalidade das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores que definem as direções dessas retas, isto é:

$$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$$

As retas $r_1 : \begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{x-3}{8} = \dfrac{z+1}{-6} \end{cases}$ e $r_2 : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-3}{4}$ são ortogonais.

De fato:

$$\vec{v_1} = (8,0,-6);$$

$$\vec{v_2} = (3,5,4); \qquad \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 24 + 0 - 24 = 0$$

Exercícios

EXERCÍCIO 1

A reta g passa pelos pontos P(3, -2, 1) e Q(5, 1, 0).
Determine a equação vetorial de g.

$$(x, y, z) = (3, -2, 1) + t(2, 3, -1)$$

Determine também os pontos em que essa reta intercepta os planos coordenados.

$$xy : (5, 1, 0)$$

$$yz : \left(0, \frac{-13}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$xz : \left(\frac{13}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

EXERCÍCIO 2

Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto (2 , -1 , -3) e é paralela:

a. ao vetor $\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

b. a reta $\frac{x}{3} = \frac{y+7}{-1} = \frac{z-3}{6}$

c. a reta $x = 2t - 3; y = 3 - 2t; z = 5t - 4$

EXERCÍCIO 3

Escreva as equações paramétricas e simétricas da reta que passa pelos pontos: (2, 0, 3) e (-1, 3, 5);

EXERCÍCIO 4

Mostre que as retas $r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 + 9t \end{cases}$