TICs

Cálculo Vetorial

Estudo do plano

Prof. Vasco Ricardo Aquino da Silva

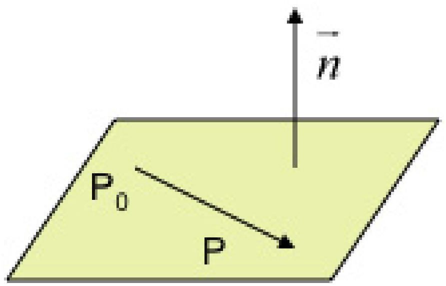
UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CAPES

INSTITUTO FEDERAL SUL-RIO-GRANDENSE

Equação geral do plano

Sejam $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente ao plano π e $n=(a,b,c)$ um vetor ⊥ a.
Tem-se que P=(x, y, z) pertence a π se e só se:



$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0$$

$$(a,b,c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Sendo assim, se fizermos:

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0 \Rightarrow ax + by + cz + d = 0$$

Estudo do plano

- Da forma com que definimos o plano π, vimos que ele fica perfeitamente identificado por um de seus pontos A e por um vetor normal $\vec{n} = (a,b,c)$ a π, com *a*, *b*, *c* não simultaneamente nulos. Qualquer vetor $k\vec{n}, k \neq 0$ é também vetor normal ao plano.

- É importante observar que os três coeficientes a, b e c da equação geral $ax + by + cz + d = 0$ representam as componentes de um vetor normal ao plano. Por exemplo, se um plano π é dado por: $\pi : 3x + 2y - 4z + 5 = 0$, um de seus vetores normais é: $\vec{n} = (3, 2, -4)$.

- Este mesmo vetor $\vec{n}$ é também normal a qualquer plano paralelo a π. Assim, todos os infinitos planos paralelos a π têm equação geral do tipo:

$$3x + 2y - 4z + d = 0$$

na qual *d* é o elemento que diferencia um plano de outro. O valor de *d* está identificado quando se conhece um ponto do plano.

EXEMPLO 1

Obtenha uma equação geral do plano que passa pelo ponto A=(0, 2, 1) e tem um vetor normal *n*=(-1, 3, 2).

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

$$-x+3y+2z+d=0$$

$$A\in\pi\Rightarrow -0+3(2)+2(1)+d=0\Rightarrow d=-8$$

$$\boxed{-x+3y+2z-8=0}$$

Exemplo 2

Obtenha 2 pontos do plano $-x+3y+2z-8=0$.

Sugestão: basta atribuir valores arbitrários a duas das variáveis e calcular o valor da outra variável na equação dada.

Por exemplo, se fizermos x=1 e y=2 teremos -1+6+2z-8=0.

Logo, z=3/2.

Portanto o ponto (1,2,3/2) pertence ao plano dado.

Exemplo 3

Escrever uma equação geral do plano π que passa pelo ponto A(2,1,3) e é paralelo ao plano $\pi_1 : 3x - 4y - 2z + 5 = 0$

$$\vec{n} = (3,-4,-2) \perp \pi_1 \Rightarrow \vec{n} \perp \pi$$

$$\pi : 3x - 4y - 2z + d = 0$$

$$A \in \pi \Rightarrow 3(2) - 4(1) - 2(3) + d = 0 \Rightarrow d = 4$$

$$\pi : 3x - 4y - 2z + 4 = 0$$

Exemplo 4

A reta $r:\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ é ortogonal ao plano π que passa pelo ponto A(2,1,-2).

Determine uma equação geral de π.

$$\vec{v}\ \acute{e}\ vetor\, diretor\ de\ r \Rightarrow \vec{v} \perp \pi$$

$$\vec{v} = (3,2,1)$$

$$\pi : 3x + 2y + z + d = 0$$

$$A \in \pi \Rightarrow 3(2) + 2(1) + (-2) + d = 0 \Rightarrow d = -6$$

$$\pi : 3x + 2y + z - 6 = 0$$

Exemplo 5

Obter a equação geral do plano que passa pelo ponto A(2,2,1) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 5, -3)$.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} +2 & -3 & +1 & +2 & -3 \\ -1 & +5 & -3 & -1 & +5 \end{vmatrix} = (4,5,7)$$

$$4x + 5y + 7z + d = 0$$

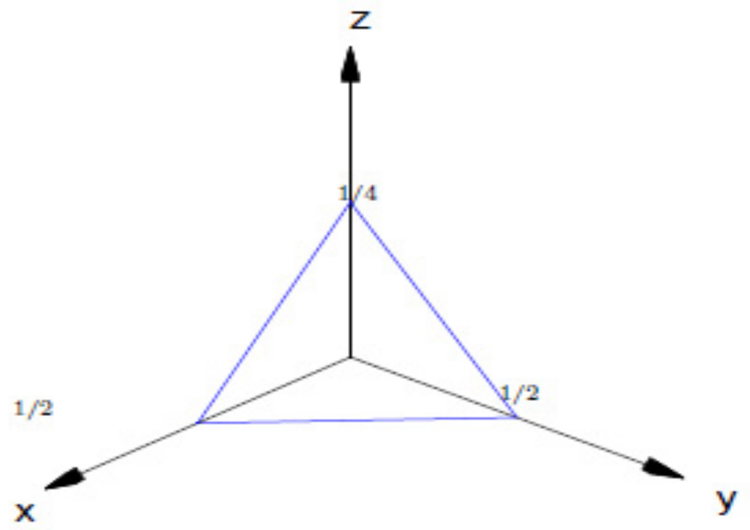
$$(2,2,1) \in \pi \Rightarrow 8 + 10 + 7 + d = 0$$

$$d = -25$$

$$4x + 5y + 7z - 25 = 0$$

Exemplo 6

Represente graficamente o plano $2x+2y+4z-1=0$.



Equação Vetorial do Plano

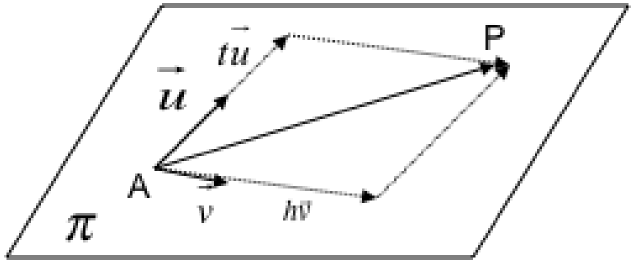
Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a π porém não-paralelos.
Para todo ponto P do plano, os vetores $\overrightarrow{AP}, \vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares. Um ponto P(*x*,*y*,*z*) pertence a π se, e somente se existem números reais *t* e *h* tais que:

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{u} + h\vec{v}$$

$$P = A + t\vec{u} + h\vec{v}$$

ou, em coordenadas

$$(x, y, z) = (x_0, y_o, z_0) + t(a_1, b_1, c_1) + h(a_2, b_2, c_2),\ t, h \in \Re$$



Esta equação é denominada equação vetorial do plano π.
Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores de π.

Observação 1

Note que a equação paramétrica da reta é determinada a partir da variação de um parâmetro t e que a equação paramétrica do plano é caracterizada pela variação de dois parâmetros, h e t. Por isso dizemos que a reta é uni-dimensional e que o plano é bi-dimensional.

Exemplo

Obter a equação vetorial do plano que passa pelo ponto A(2,2,1) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2,-3,1)$ e $\vec{v} = (-1,5,-3)$

$$(x, y, z) = (x_0, y_o, z_0) + t(a_1, b_1, c_1) + h(a_2, b_2, c_2),\ t, h \in \Re$$

$$(x, y, z) = (2,2,1) + t(2,-3,1) + h(-1,5,-3)$$

Equações Paramétricas

Fixemos um sistema de coordenadas no espaço. Sejam $\vec{u}=(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v}=(a_2, b_2, c_2)$ vetores linearmente independentes paralelos ao plano α e $P_o=(x_o, y_o, z_o)$ um ponto de α. Assim, uma equação vetorial do plano α pode ser escrita como:

$$(x, y, z)=(x_o, y_o, z_o)+t(a_1, b_1, c_1)+h(a_2, b_2, c_2),\ \ t, h \in \mathrm{IR}$$

A equação acima equivale ao sistema:

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t + a_2 h \\ y = y_o + b_1 t + b_2 h; \ \ t, h \in \mathrm{IR} \\ z = z_o + c_1 t + c_2 h \end{cases}$$

As equações deste sistema são chamadas equações paramétricas do plano α.

Exemplo 1

Obter as equações paramétricas do plano que passa pelo ponto A(2, 2, 1) e é paralelo aos vetores .

$$\vec{u} = (2,-3,1)\, e\, \vec{v} = (-1,5,-3)$$

Da equação:

$$(x, y, z) = (2,2,1) + t(2,-3,1) + h(-1,5,-3)$$

Obtemos:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t - h \\ y = 2 - 3t + 5h \\ z = 1 + t - 3h \end{cases}$$

Exemplo 2

Dado o plano π determinado pelos pontos A(1,-1,2), B(2,1,-3) e C(-1,-2,6), obter:
a. um sistema de equações paramétricas de π

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,2,-5) \ e \ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-2,-1,4)$$

$$\begin{cases} x = 1 + t - 2h \\ y = -1 + 2t - h \\ z = 2 - 5t + 4h \end{cases}$$

b. Uma equação geral de π

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,2,-5) \;\; e \;\; \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-2,-1,4) \; \textit{são vetores diretores de } \pi$$

$$Logo, \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \; \textit{é normal à } \pi$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} +1 & +2 & -5 & +1 & +2 \\ -2 & -1 & +4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (3,6,3)$$

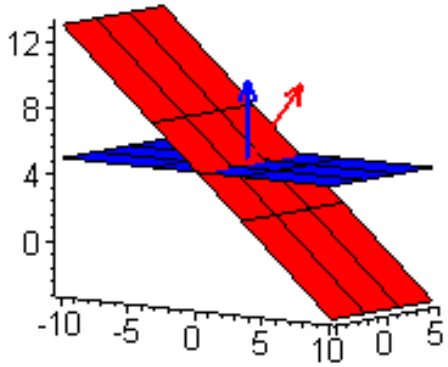
$$3x + 6y + 3z + d = 0$$

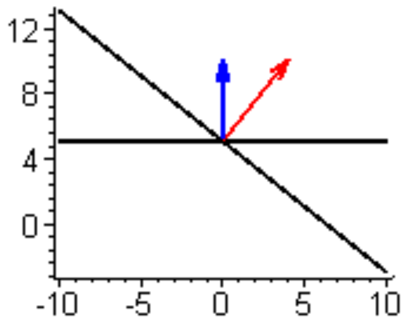
$$A(1,-1,2) \Rightarrow 3 - 6 + 6 + d = 0 \Rightarrow d = -3$$

$$\boxed{3x + 6y + 3z - 3 = 0}$$

Ângulo de dois planos

$$\cos\theta = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{\|N_1\|\|N_2\|}$$





ATIVIDADE

Mostre que o ângulo formado pelos dois planos é o mesmo formado pelos seus vetores normais.