TICs

Cálculo Vetorial

Funções de duas variáveis

Prof. Vasco Ricardo Aquino da Silva

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CAPES

INSTITUTO FEDERAL SUL-RIO-GRANDENSE

Retomando...

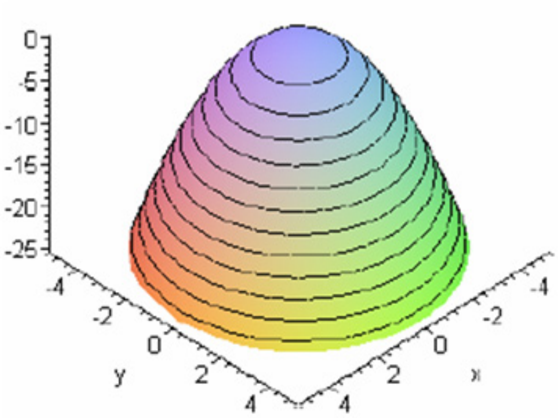
Dada a função $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$, determine:

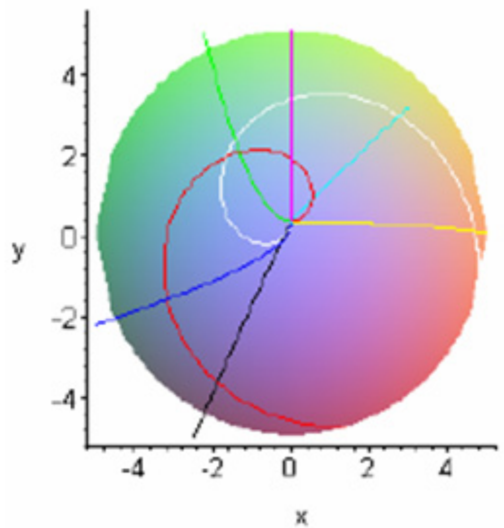
a. O domínio e sua representação gráfica;
b. As curvas de nível para z=1, z=2, z=3;
c. Sua representação gráfica.

Limites de funções de duas variáveis

Dada uma função $f(x,y)$, dizemos que o limite de f é igual a L quando (x,y) se aproxima de um ponto de referência (a,b), se pudermos tornar os valores de $f(x,y)$ tão próximos de L conforme (x,y) se aproximar de (a,b).

$$\boxed{\lim_{x \to (a,b)} f(x,y) = L}$$





Para pensar...

De quantas formas diferentes podemos nos aproximar de um ponto no eixo real?

De quantas formas diferentes podemos nos aproximar de um ponto no plano?

Dificuldades do cálculo de limites

Para se estimar o limite de uma função de duas variáveis *f* no ponto (x_0, y_0) é necessário calcular esse valor por todas as trajetórias que passem por este ponto. Se em todos os casos o resultado for sempre o mesmo, digamos L, diz-se que o limite existe e que vale L.

Caso o limite não exista em alguma trajetória ou dê um valor diferente para trajetórias diferentes, dizemos que o limite não existe.

Exemplo

Mostre que a função abaixo não tem limite quando (x,y) se aproxima de (0,0).

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

1. Tentamos calcular o limite por substituição direta, o que gera a indeterminação 0/0.
2. Tomamos uma trajetória que passe pelo ponto (0,0), $y=kx^2$.

$$f(x,kx^2) = \frac{2x^2kx^2}{x^4+(kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2}$$

Portanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ao longo de } y=kx^2}} f(x,y) = \frac{2k}{1+k^2}$$

Note que este limite varia de acordo com o valor escolhido para k. Logo, este limite não existe.

2. Continuidade

Uma função f(x,y) é contínua no ponto (x0, y0) se:
Esta definição não é trivial de ser utilizada, contudo, sabe-se que:

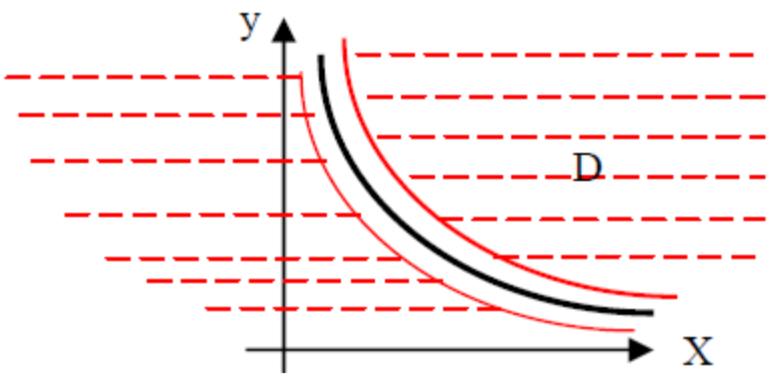
$$\left.\begin{array}{l}(i)\ \ \textit{Existir}\ f(x_0,y_0);\\ (ii)\ \ \textit{Existir}\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\end{array}\right\}\ (iii)\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

- A soma, a subtração e o produto de funções contínuas é contínua.
- A divisão de funções contínuas é contínua desde que o denominador não se anule.
- A composição de funções contínuas é contínua.

Exemplos

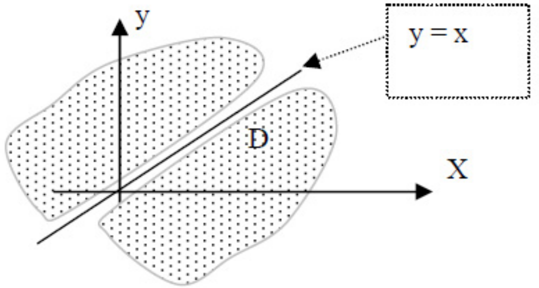
a. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, é contínua para todo par x,y

b. $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x\,y - 1}$ é contínua $\forall\ x.y \neq 1$ ou $y \neq 1/x$

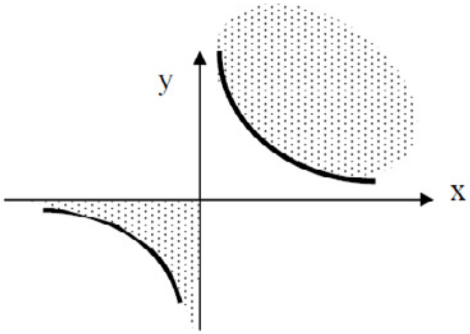


Exemplos

a. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ é contínua se $\forall\ x \neq y$



b. $f(x,y) = \sqrt{y - 1/x}$ a função é contínua se $y - 1/x \geq 0$, $y \geq 1/x$



3. Derivadas de funções de duas variáveis

A definição da **derivada total** de uma função de duas variáveis é dada por:

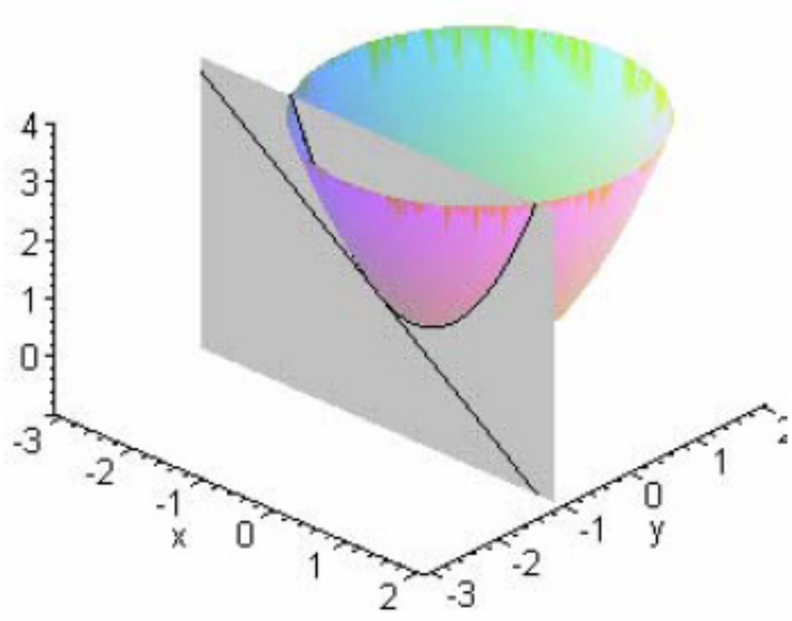
$$f'(x_0, y_0) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{d((x,y),(x_0,y_0))}$$

onde $d((x,y),(x_0,y_0))$ é a distância entre os pontos (x,y) e (x0,y0).

O cálculo de várias variáveis é, na realidade, o cálculo de uma variável aplicado a várias variáveis uma de cada vez. Quando fixamos todas as variáveis independentes, exceto uma, e derivamos em relação a esta variável, obtemos uma “**derivada parcial**”.

4. Derivada parcial

A derivada parcial de uma função de duas ou mais variáveis é obtida pela derivação de uma curva que represente um caminho sobre a função e paralelo à variável escolhida.



Derivada parcial em relação a x

Notações

$$\boxed{f_x \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x}} \longrightarrow \boxed{\text{Lê-se: Derivada parcial da f com relação a x.}}$$

$$f_y \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial y} \qquad f_z \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial z}$$

Exemplo

Determine os valores de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto (4, -5) se $f(x,y) = x^2 + 3xy + y - 1$

1º) Para calcularmos a derivada parcial em relação a x, tratamos y como uma constante:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y}$$

Atribuindo o ponto dado:

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(4,-5)} = 2.4 + 3.(-5) = -7}$$

2º) Para calcularmos a derivada parcial em relação a y, tratamos x como uma constante:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 1}$$

Atribuindo o ponto dado:

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(4,-5)} = 3.4 + 1 = 13}$$

Exemplo

Calcule a derivada parcial com relação a y da função $f(x,y) = y.sen(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (y)'.sen(xy) + y.(sen(xy))'$$

Derivada do produto

$$= 1.sen(xy) + y.xcos(xy)$$

Considerando x como uma constante, temos:
Os procedimentos e regras de derivação são similares aos utilizados para funções de uma variável.

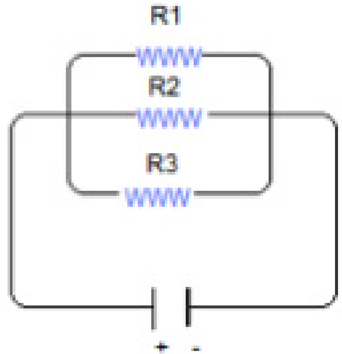
Exercício de aplicação

Exercício

Se resistores elétricos de R1, R2 e R3 ohms são conectados em paralelo para formar um resistor de R ohms, o valor de R pode ser encontrado a partir da equação:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}$$

Calcule o valor de $\frac{\partial R}{\partial R2}$ quando R1=30, R2=45 e R3=90 ohms.



Solução

Para calcularmos $\frac{\partial R}{\partial R2}$, tratamos R1 e R3 como constantes e derivamos ambos os lados da equação com relação a R2:

$$\frac{\partial}{\partial R2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial R2}\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}\right)$$

$$-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R2} = 0 - \frac{1}{(R2)^2} + 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial R2} = \left(\frac{R}{R2}\right)^2$$

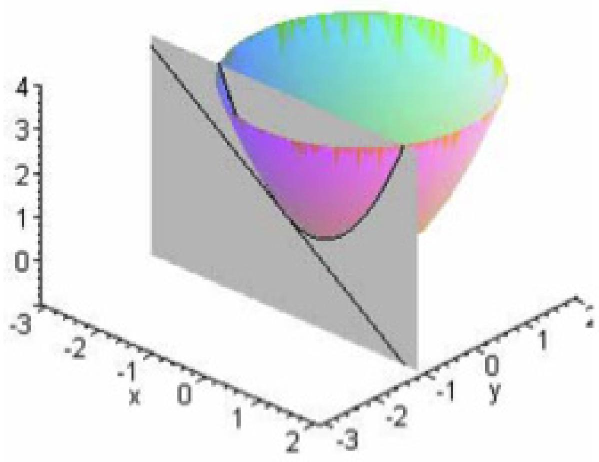
Atribuindo os valores dados, temos: $\frac{1}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90} = \frac{1}{15}$

Logo, $\frac{\partial R}{\partial R2} = \left(\frac{15}{45}\right)^2 = \frac{1}{9}$

Mas, o que isto significa????

Interpretação geométrica

Considere a superfície abaixo, gráfico de uma função $z = f(x,y)$.
Se fixarmos $y=k$ a função f se reduz a uma função de uma variável x, $z = f(x,k)$.



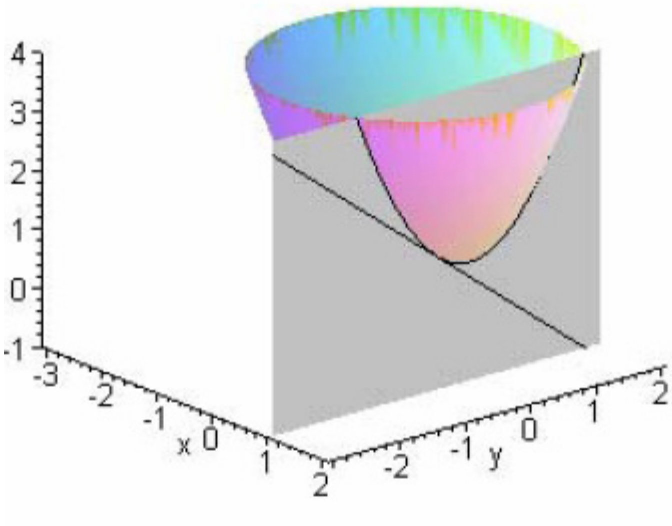
Derivada parcial em relação a x

Portanto, a derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_1,y_1) representa a declividade da superfície no ponto (x_1,y_1) na direção paralela ao eixo x, isto é:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_1)=m_t$$

- Analogamente, a derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_1,y_1) representa a declividade da superfície no ponto (x_1,y_1) na direção paralela ao eixo y, isto é:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_1)=m_t$$



Derivada parcial de f em relação a y

Exemplo

Dada $f(x,y) = x^2y + 5y^3$,determine:

a. A inclinação de *f* no ponto (1,-2) na direção do eixo *x*.
b. A inclinação de *f* no ponto (1,-2) na direção do eixo *y*.

Exemplo

Calcular a inclinação da reta tangente à interseção da superfície dada por $z=4x^2y-xy^3$ com o plano $y=2$ no ponto (3, 2 ,48).

1º) O exercício solicita a derivada parcial com relação a x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(4x^2y)-\frac{\partial}{\partial x}(xy^3) \quad =8xy-y^3$$

2º) Atribuindo as coordenadas do ponto $x=3$ e $y=2$,temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,2)=40$$

3º) Como queremos a inclinação, basta procurar o arco cuja tangente vale 40:

$$\alpha = \tan^{-1}(40) = 88,57°$$

Taxas de variação

$\frac{\partial f}{\partial x}$ fornece a taxa de variação de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ em relação a $\boldsymbol{x}$ para $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{k}$ (constante), isto é, mede a taxa de variação de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ se move na direção do eixo x.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ fornece a taxa de variação de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ em relação a $\boldsymbol{y}$ para $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}$ (constante), isto é, mede a taxa de variação de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ se move na direção do eixo y.

Exemplo

Uma placa de metal aquecida está situada em um plano *xy* de modo que a temperatura T no ponto (*x*,*y*) é dada por $T(x,y) = 10(x^2 + y^2)^2$. Determine a taxa de variação de T em relação à distância no ponto P(1,2) na direção do eixo das abscissas.

1º) O exercício solicita a derivada parcial da função T, em relação a variável *x*:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 20(x^2 + y^2)^1 .2x$$

2º) Basta atribuir o ponto (1,2):

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 20(1^2 + 2)^1 .2.1 = 200$$

Derivadas de ordens superiores

As derivadas parciais *fx* e *fy* de uma função *f*(*x*,*y*) são também funções de *x* e de *y*, logo podem ser consideradas suas derivadas parciais, que são as derivadas parciais de segunda ordem da *f*. E assim, sucessivamente.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ ou $f_{xx} = (f_x)_x$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ ou $f_{yy} = (f_y)_y$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ ou $f_{xy} = (f_x)_y$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ ou $f_{yx} = (f_y)_x$
Derivando duas vezes em relação a x	**Derivando duas vezes em relação a y**	**Derivando primeiro em relação a *x* e depois em relação a *y***	**Derivando primeiro em relação a *y* e depois em relação a *x***
Derivadas puras		**Derivadas mistas**	

Funções de duas variáveis

As derivadas parciais de segunda ordem mistas são iguais para funções continuas com derivadas parciais continuas.

Para a função $f(x,y) = x^2 + y^2 + 10$

a) f_x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

b) f_{xx}

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x) = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = 2$$

c) f_{xy}

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

d) f_y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

e) f_{yy}

$$\frac{\partial}{\partial y}(2y) = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = 2$$

f) f_{yx}

$$\frac{\partial}{\partial x}(2y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$