Cálculo Vetorial

Funções de duas variáveis II

Prof. Vasco Ricardo Aquino da Silva

1. **Regra da cadeia**

   Assim como para função de uma variável, esta técnica serve para calcularmos a derivada de funções compostas, porém, agora, envolvem duas variáveis.

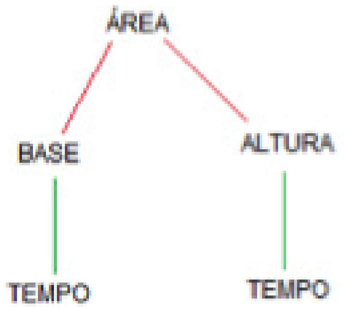
Se $z = f(x,y)$, $x = g(t)$ e $y = h(t)$ então $z = f(g(t),h(t))$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\begin{tikzcd}
 & z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x \arrow[d] & & y \arrow[d] \\
t & & t
\end{tikzcd}$$

Diagrama da árvore

Exemplo



Seja a função que nos dá a área de um retângulo de base b e altura h. Sabemos que se variarmos a base ou a altura então o valor da área também se alterará. Mas para que isto ocorra, o valor da base e o valor da altura deverão variar com o passar do tempo t, isto significa que as variáveis base e altura dependerão do tempo t.

- taxa de variação da área em relação ao tempo t
- taxa de variação da base em relação ao tempo t
- taxa de variação da altura em relação ao tempo t
- taxa de variação da área em relação à base b
- taxa de variação da área em relação à altura h

Logo, encontraremos a taxa de variação da área em relação ao tempo t:

Funções de duas variáveis II

Exemplo

Seja $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, com $x(t)=2t \quad \text{e} \quad y(t)=t+1$
Calcule a derivada total da função f.

$$\begin{tikzcd}
 & z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x \arrow[d] & & y \arrow[d] \\
t & & t
\end{tikzcd}$$

1ª solução) Efetue a composição antes de derivar:

$$f(x(t),y(t)) = \sqrt{(2t)^2+(t+1)^2}=\sqrt{5t^2+2t+1}$$

$$f'(x(t),y(t))=\frac{1}{2}(5t^2+2t+1)^{-1/2}.(10t+2)=\frac{5t+1}{\sqrt{5t^2+2t+1}}$$

Funções de duas variáveis II

2ª solução) Derive antes de compor:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ x \arrow[d] & & y \arrow[d] \\ t & & t \end{tikzcd}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).1 = \frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{2(2t)+(t+1)}{\sqrt{(2t)^2+(t+1)^2}} = \frac{5t+1}{\sqrt{5t^2+2t+1}}$$

Derivação implícita

Exemplo

Considere D a diagonal de um retângulo de lados x e y. Determine a taxa de variação de D em relação a x, no ponto (3,4).

$$D^2 = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial D^2}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial x}$$

$$2D\frac{\partial D}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{x}{D}$$

$$x = 3 \text{ e } y = 4 \rightarrow \; D = 5$$

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{3}{5}$$

D está crescendo a uma taxa de 3/5 unidades por aumento de unidade de x no ponto (3,4)

Exemplo

Calcule as derivadas parciais com relação a x e a y sendo

$$xyz + e^z - 1 = 0$$

$$yz + xy.\frac{\partial z}{\partial x} + e^z.\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad xz + xy.\frac{\partial z}{\partial y} + e^z.\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

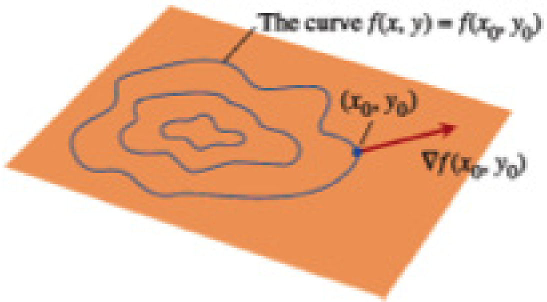
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-yz}{xy + e^z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-xz}{xy + e^z}$$

2. Gradiente

Defini-se gradiente de uma função diferenciável f, e indica-se por ∇f o vetor

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ ou ainda } \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}.\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}.\vec{\jmath}$$

O vetor gradiente (ou qualquer múltiplo dele) possui a característica de ser normal a curva de nível no ponto considerado.



Propriedades algébricas do gradiente

$$\nabla(kf) = k\nabla f$$

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

$$\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

Exemplo

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Calcule o gradiente da função f nos casos:

$$f(x, y) = 5x^2y + 2$$

$$w(x, y, z) = xlny + ylnz + zlnx$$

Calcule o gradiente da função $f(x, y) = 5x^3y + 2x$ **no ponto (3, 5).**

Exemplo

Calcule as coordenadas de um vetor normal à elipse no ponto de abscissa 1 e ordenada positiva.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

1º) Aplicamos a abscissa do ponto dado:

$$x=1 \rightarrow \frac{1}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \rightarrow y^2=12 \rightarrow y=+2\sqrt{3}$$

2º) Precisamos obter uma função f tal que a elipse dada seja uma curva de nível:

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}$$

3º) Claramente vemos que a elipse dada é a curva de nível 1 da função f, portanto, o vetor normal ao ponto (1, 2√3) é obtido através do gradiente.

$$\nabla f=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{8}\right) \qquad \nabla f|_{(1,2\sqrt{3})}=\left(\frac{1}{2},\frac{2\sqrt{3}}{8}\right)$$

Qualquer vetor da forma $\left(\frac{1k}{2},\frac{k\sqrt{3}}{4}\right)$ serve como resposta.

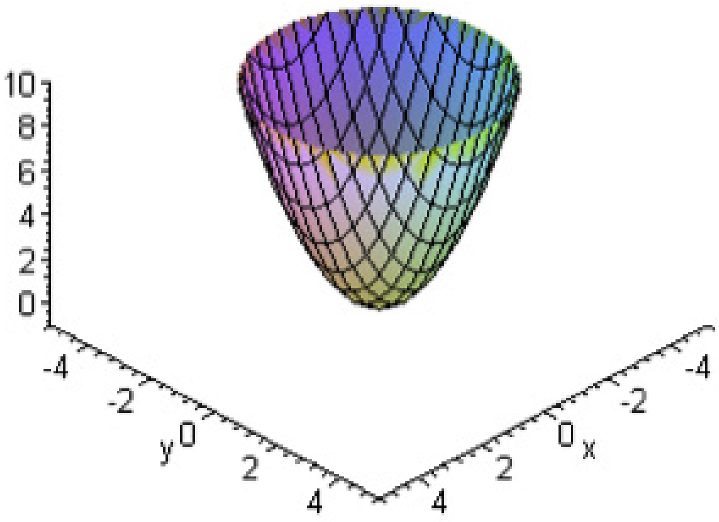
Importância do Vetor Gradiente

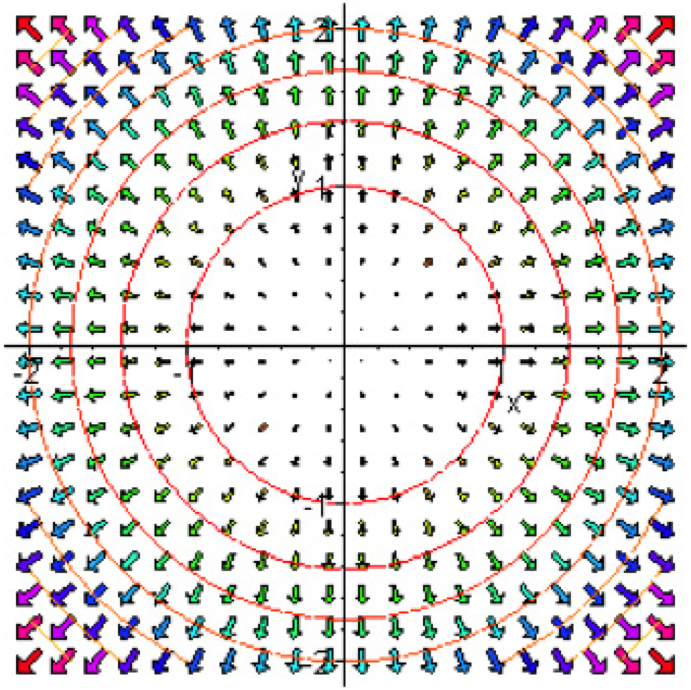
Uma importante informação que o vetor gradiente traz é a do crescimento da função:

- O vetor gradiente indica a direção e o sentido de maior crescimento da função a partir do ponto em que foi calculado.
- O módulo do vetor gradiente indica a intensidade do crescimento da função a partir do ponto em que foi calculado.
-

O vetor gradiente ainda completa a informação gráfica obtida no mapa de contornos de uma superfície, determinando o “fluxo de crescimento” da superfície.

Exemplo





3. Derivadas direcionais

Suponha que quiséssemos calcular a taxa de variação instantânea de uma função em relação à distância num certo ponto (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$.

Essa taxa de variação é denominada derivada direcional da função f no ponto (x0, y0) na direção do vetor $\vec{u}$.

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

Notação: $D_u f(x_0, y_0)$

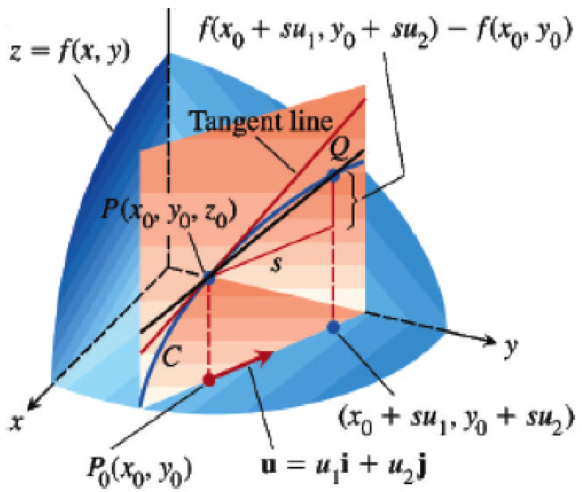
$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

Dada f(x,y)=xy, encontre Du(1,2), onde $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Resposta: 2,23. O que significa se percorremos uma pequena distância a partir de (1,2) na direção e no sentido do vetor u, a função cresce 2,23 vezes a distância percorrida.

Interpretação geométrica

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$



- O vetor u determina uma reta *l* no plano *xy* que pode ser expressa parametricamente por $x=x_0+su_1$ e $y=y_0+su_2$

- Observe que $z=f(x_0+su_1,\ y_0+su_2)$ é a composta da função *f* com as *x* e *y*. Pelo diagrama da árvore, temos:

$$D_u f(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{ds}$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right).\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds}\right)$$

$$= \nabla \vec{f}.(u_1,u_2)$$

$$= \nabla \vec{f}\ .\ \vec{u}$$

Resumindo...

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f \,.\, \vec{u}$$

Exemplo: Calcule a derivada direcional da função $f(x,y)=3x^2+4y^2x$ no ponto (-1, 2) e na direção do vetor $u=(3,4)$.

1º) Calculamos o vetor gradiente aplicado no ponto (-1, 2):

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (6x + 4y^2, \quad 8xy)|_{(-1,2)} = (10, -16)$$

2º) Verificamos se o vetor direcional é unitário, caso contrário calculamos seu versor:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \neq 1 \qquad \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

logo,

$$D_u f(-1,2) = \nabla f \,.\, \vec{u} = (10, -16)\,.\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{30}{5} - \frac{64}{5} = -\frac{34}{5}$$

Mas o que isto significa????

Interpretação

Significa que se percorrermos uma pequena distância a partir do ponto (-1,2) na direção e no sentido do versor de (3,4), então a função decresce cerca de 6,8 vezes.

Exemplo

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f \,.\, \vec{u}$$

Dada f(x,y)= xy, encontre Du(1,2) onde $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

1º) Calculamos o vetor gradiente aplicado no ponto (1, 2):

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y, x)|_{(1,2)} = (2,1)$$

2º) Verificamos se o vetor direcional é unitário:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

logo,

$$D_u f(2,1) = \nabla f \,.\, \vec{u} = (2,1) \,.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cong 2{,}23$$

Se percorrermos uma pequena distância a partir de (1,2) na direção e sentido de u, então *f*(*x*,*y*) cresce cerca de 2,23 vezes a distância percorrida.

Estimando a variação de *f* em uma direção do vetor u

Para estimar a variação do valor de *f* quando nos movemos ds a partir de P_0 em uma direção específica u, usamos:

$$df = \underbrace{(\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u})}_{\text{derivada direcional}} \cdot \underbrace{ds}_{\text{incremento de distância}}$$

Exemplo: Em cerca de quanto variará $f(x, y, z) = e^x \cos yz$ quando o ponto *P* se deslocar da origem uma distância *ds*=0,1 unidades na direção do vetor $\vec{u} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$?