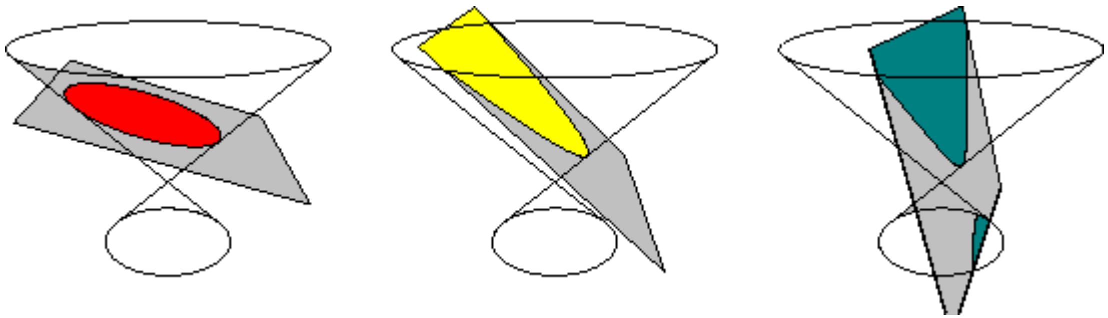
SECÇÕES CÔNICAS E SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Prof. Vasco Ricardo Aquino da Silva

SECÇÕES CÔNICAS



Usando o programa winplot visualize as cônicas disponíveis em nosso AVA Moodle.

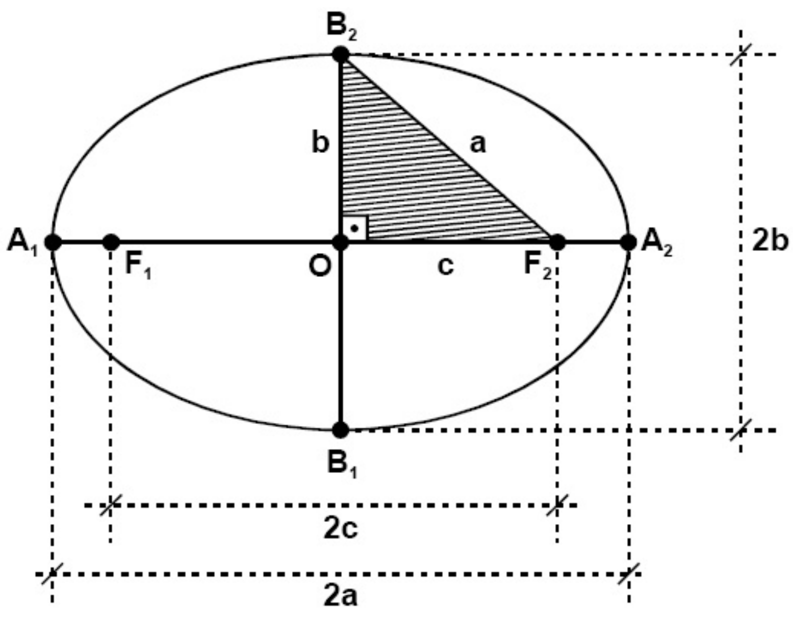
1. **Elementos da Elipse:**

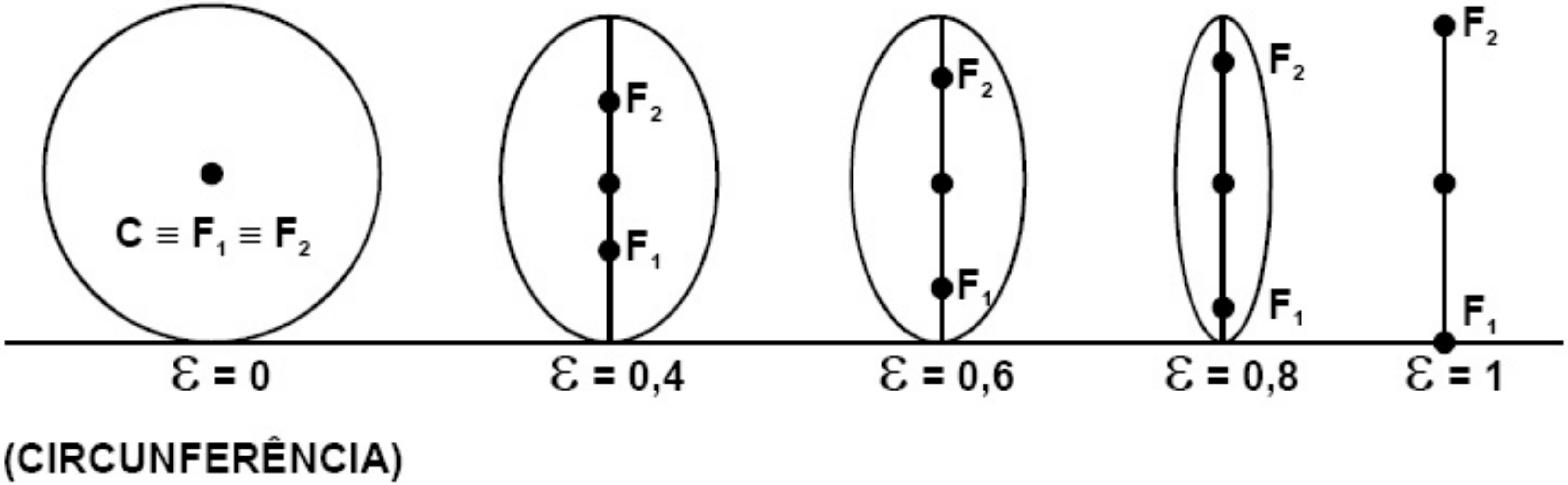
- **F1, F2**: focos. A distância entre os focos F_1 e F_2, igual a 2c, denomina-se distância focal.
- O: centro da elipse; é o ponto médio do segmento F_1, F2.
- A_1, A_2, B_1, B_2: vértices da elipse.
- Eixo maior: é o segmento A_1A_2 e cujo comprimento é 2a.
- Eixo menor: é o segmento B_1B_2 e cujo comprimento é 2b.
- Relação notável: Do triângulo retângulo B_2OF_2 hachurado na figura, obtemos a:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Excentricidade: $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$

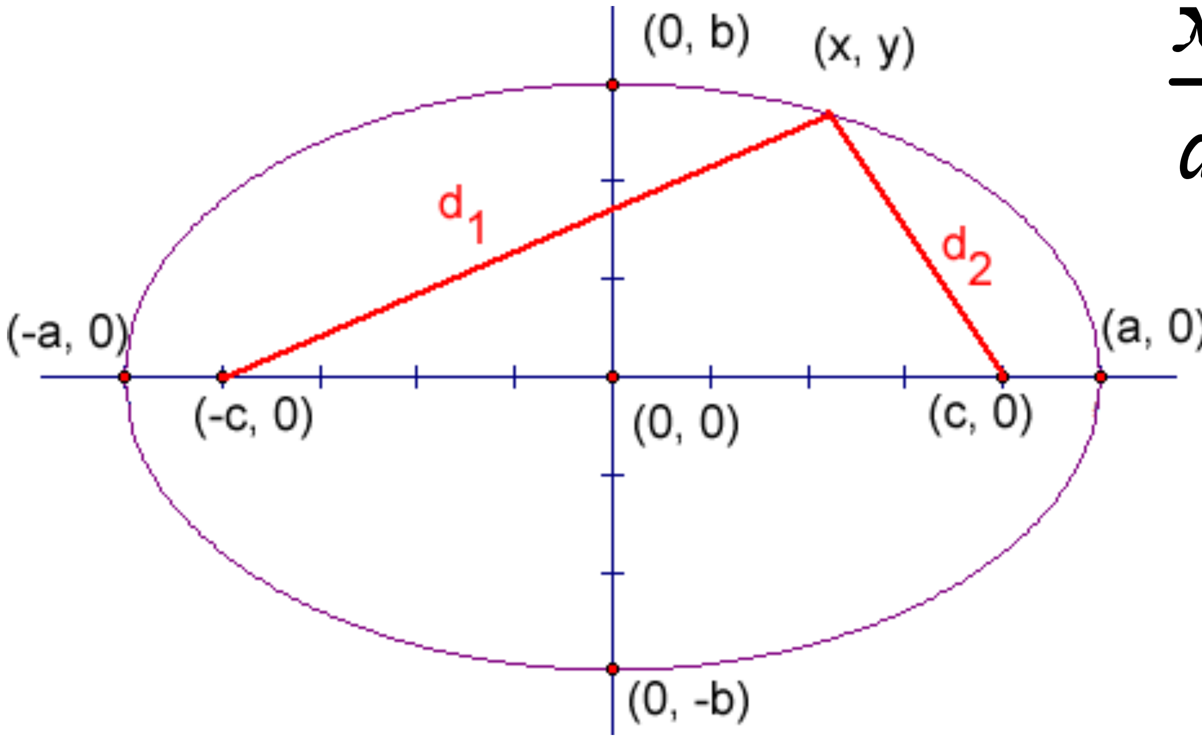
O que podemos afirmar sobre a excentricidade de uma elipse?





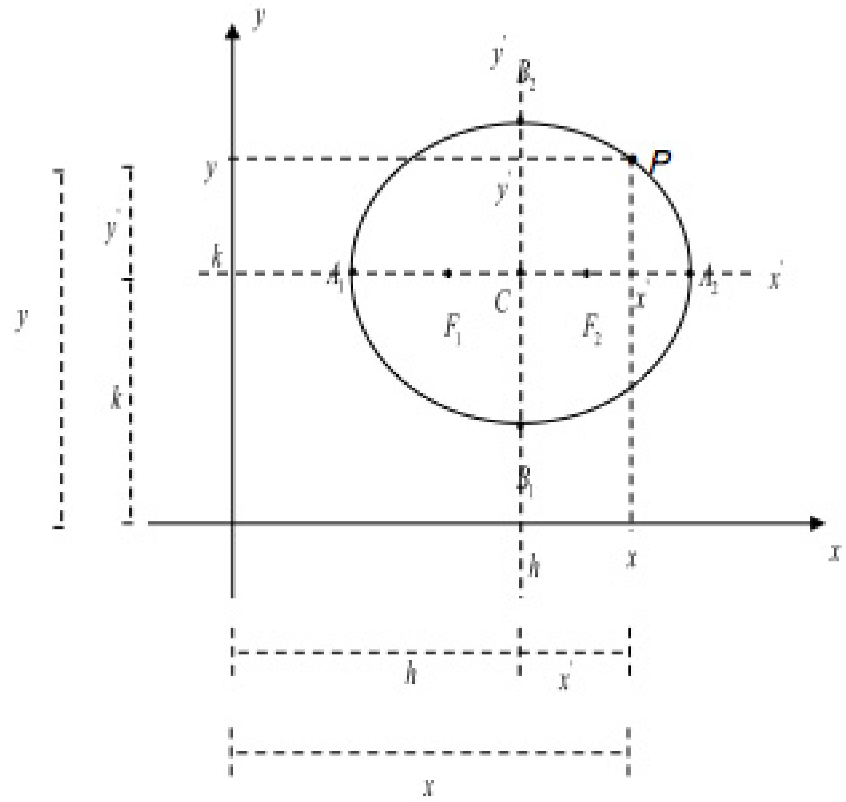
C ≡ F1 ≡ F2
F2
F1
F2
F1
F2
F1
F2
F1
Ɛ = 0
Ɛ = 0,4
Ɛ = 0,6
Ɛ = 0,8
Ɛ = 1
(CIRCUNFERÊNCIA)

EQUAÇÃO REDUZIDA DA ELIPSE COM CENTRO NA ORIGEM E EIXO MAIOR HORIZONTAL



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

EQUAÇÃO CANÔNICA DA ELIPSE COM CENTRO GENÉRICO (h,k) E EIXO MAIOR HORIZONTAL



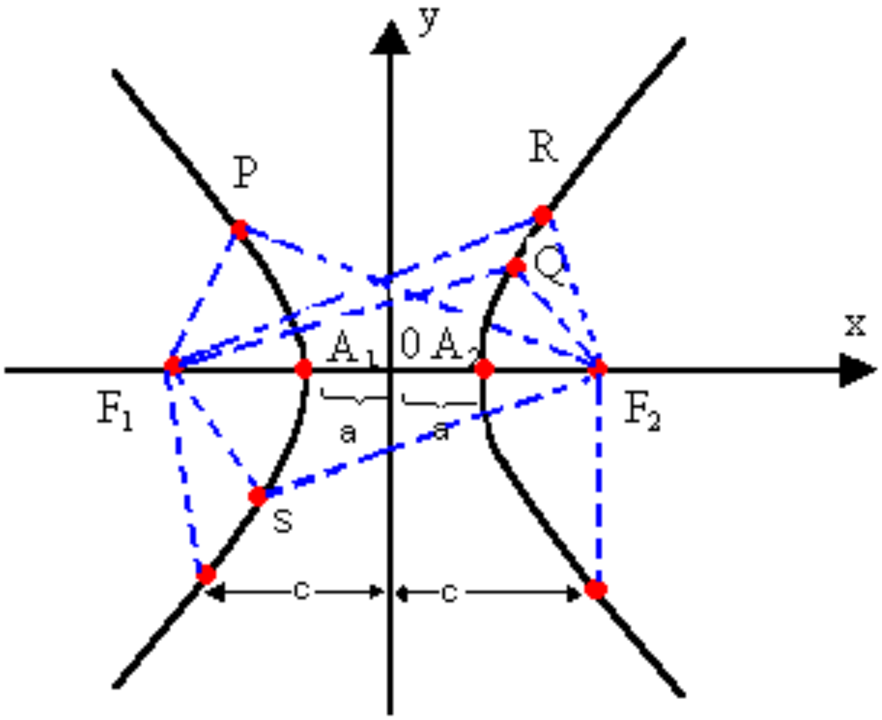
$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

2. Hipérbole

DEFINIÇÃO: É o conjunto de todos os pontos do plano para os quais o módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos (chamados de focos) é constante.

$|d_{F1P} - D_{F2P}| = 2a$



Elementos da Hipérbole

Temos:

F_1 e F_2: focos da hipérbole

A_1 e A_2 : vértices da hipérbole

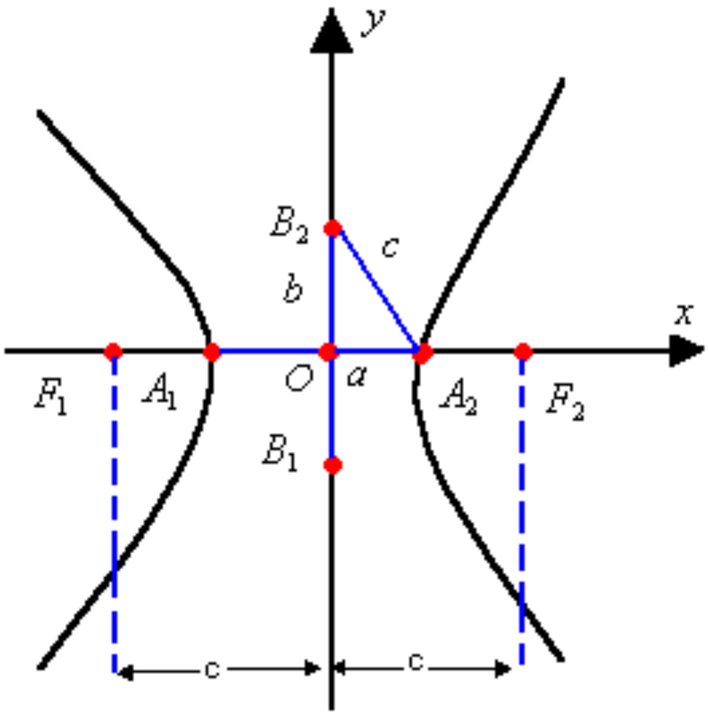
O: centro da hipérbole

c: semidistância focal

a: semieixo real

b: semieixo imaginário

Excentricidade: $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$

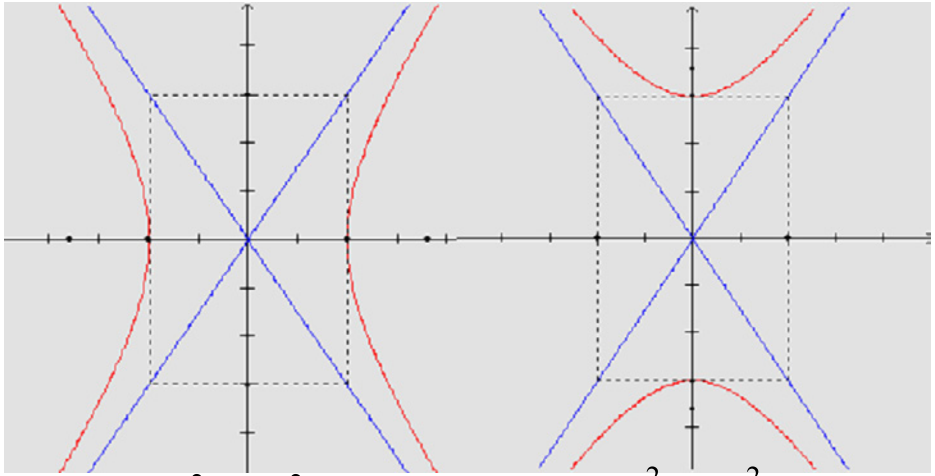


O que podemos afirmar sobre a excentricidade de uma hipérbole?

TICs

Equação Reduzida da Hipérbole com Centro na Origem...

e Focos no Eixo X e Focos no Eixo Y



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ASSÍNTOTAS :

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

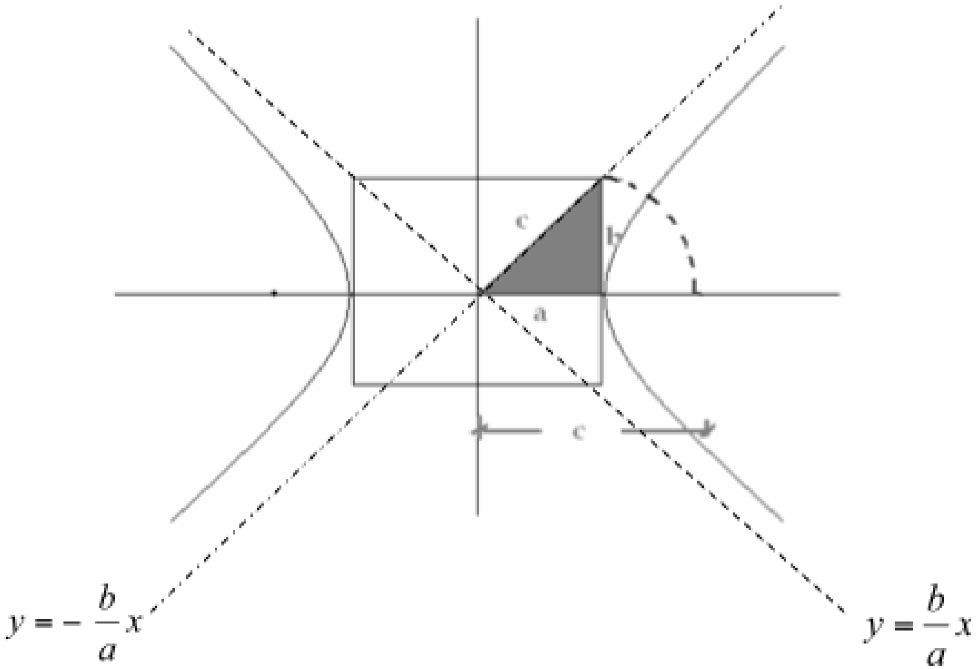
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

ASSÍNTOTAS :

$$y = \pm \frac{a}{b} x$$

OBS: O termo positivo indica o eixo no qual estão os focos!!

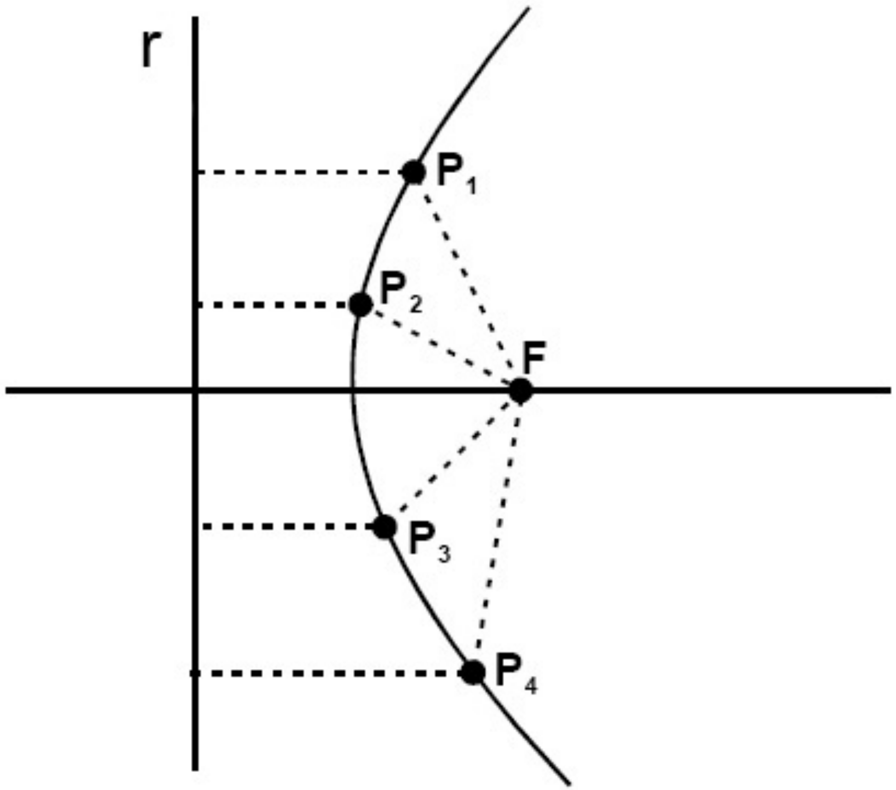
Relação Fundamental da Hipérbole



$$c^2 = a^2 + b^2$$

As retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ são denominadas ASSÍNTOTAS da hipérbole.

3. Parábola

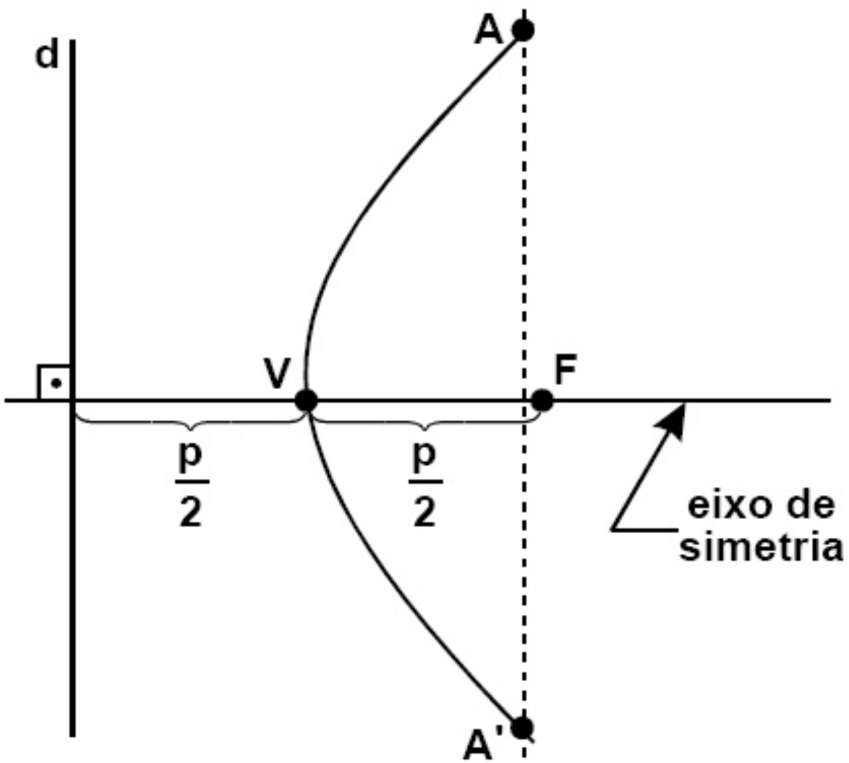


Parábola é o conjunto dos pontos P = (x, y) tais que

dist(P, F) = dist(P, r)

Parábola

Elementos da Parábola:
F: foco
d: diretriz
V: vértice
p: parâmetro, que representa a distância do foco à diretriz
reta VF: eixo de simetria da parábola.
LATUS RECTUM: é a corda AA’ que passa pelo foco e é perpendicular ao eixo de simetria. Também chamada de corda focal mínima.



Resumindo...

Centro (h,k)	Focos em eixo paralelo ao eixo x	Focos em eixo paralelo ao eixo y	Relações importantes
ELIPSE	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$a \geq b$ $a^2 = b^2 + c^2$
HIPÉRBOLE	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$-\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$c^2 = a^2 + b^2$
PARÁBOLA	$(y-k)^2 = 2p(x-h)$ concavidade para a direita; $(y-k)^2 = -2p(x-h)$ concavidade para a esquerda.	$(x-h)^2 = 2p(y-k)$ concavidade para cima; $(y-h)^2 = -2p(y-k)$ concavidade para baixo.	

TICs

Superfícies Quádricas

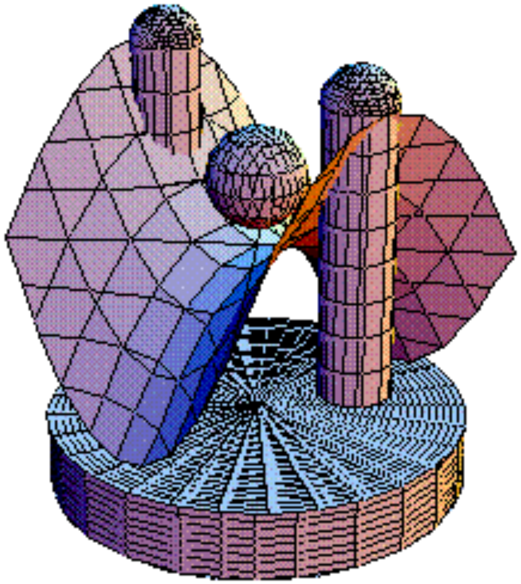
Superfícies quádricas

Objetivos:
Identificar e esboçar o gráfico de uma Quádrica, conhecida sua equação.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



TICs

Quádricas

Definição 1: Uma equação geral do 2º grau em três variáveis é uma equação do tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \qquad \text{(I)}.$$

com pelo menos uma das constantes A, B, C, D, E ou F é diferente de zero.

Uma superfície cuja equação é do tipo (I) é chamada de superfície quádrica.

Observações

A interseção de uma superfície quádrica com um dos planos coordenados ou por planos paralelos a eles é geralmente uma cônica.

Em casos particulares, a interseção pode ser uma reta, duas retas, um ponto ou o conjunto vazio. Esses casos constituem as cônicas degeneradas.

$$\text{(II)} \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D \qquad \text{(quádricas cêntricas)}$$

$$(III)\begin{cases} Ax^2 + By^2 = Cz \\ Ax^2 + Bz^2 = Cy \\ Ay^2 + Bz^2 = Cx \end{cases} \qquad \text{(quádricas não cêntricas)}$$

Quádricas Cêntricas

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$$

- Se as constantes A, B, C e D são não nulas, podemos escrever a equação (II) na forma canônica:

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

com a,b e c números reais positivos.

- Se todos os sinais são negativos então o lugar geométrico da equação é vazio.

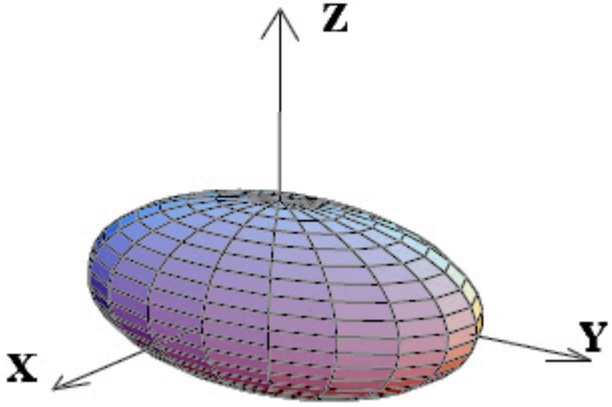
- Existem três possibilidades:

1. todos os sinais são positivos,
2. dois sinais positivos e um negativo ou
3. um sinal positivo e dois negativos

1. Elipsoide

Todos os sinais positivos: **Elipsoide**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



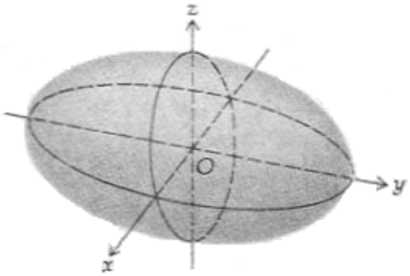
Elipsoide $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Características:

1) A superfície é simétrica em relação a todos os eixos coordenados, a todos os planos coordenados e a origem.

2) Interseções com os eixos coordenados:

- ✓ Eixo Ox : $A(\pm a,0,0)$
- ✓ Eixo Oy: $B(0,\pm b,0)$
- ✓ Eixo Oz: $C(0,0,\pm c)$

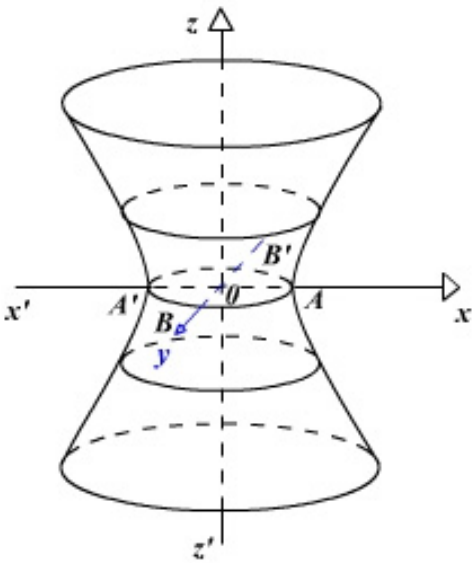


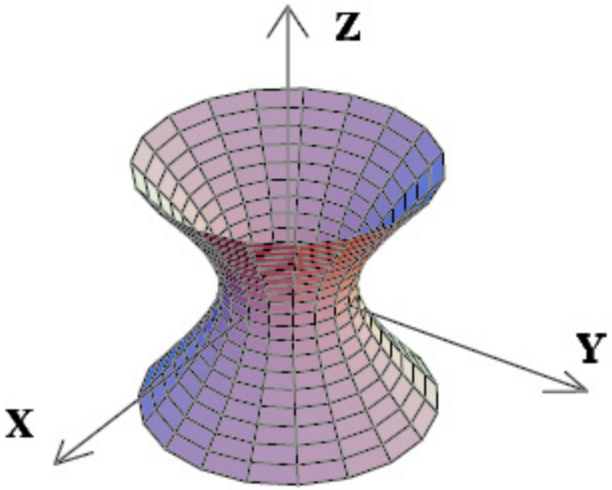
3) Traços sobre os planos coordenados: elipses

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases},\quad \begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

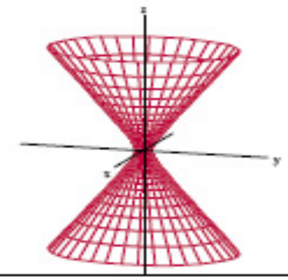
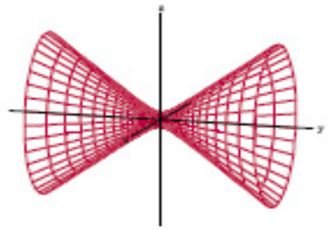
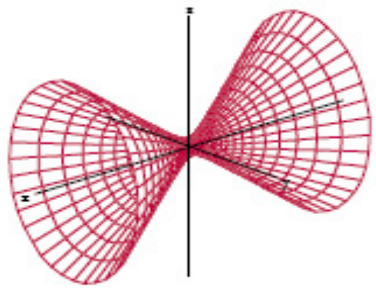
2. Hiperboloide de uma folha

Dois sinais positivos e um negativo: Hiperboloide de uma folha



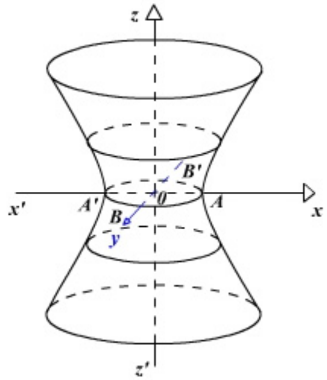


Hiperboloide de uma folha

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	

Hiperboloide de uma folha

Características: Vamos analisar a seguinte equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



1. A superfície é simétrica em relação a todos os eixos coordenados, a todos os planos coordenados e a origem.
2. A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável cujo coeficiente é negativo na forma canônica de sua equação.
3. Interseções com os eixos coordenados:

✓ Eixo Ox : $A(\pm a, 0, 0)$

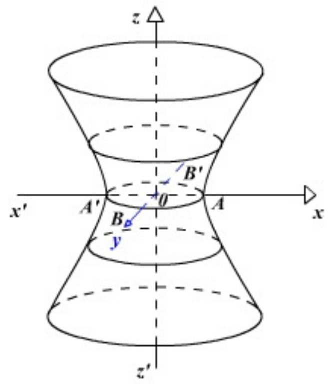
✓ Eixo Oy: $B(0, \pm b, 0)$

✓ Eixo Oz: não existe

Hiperboloide de duas folhas

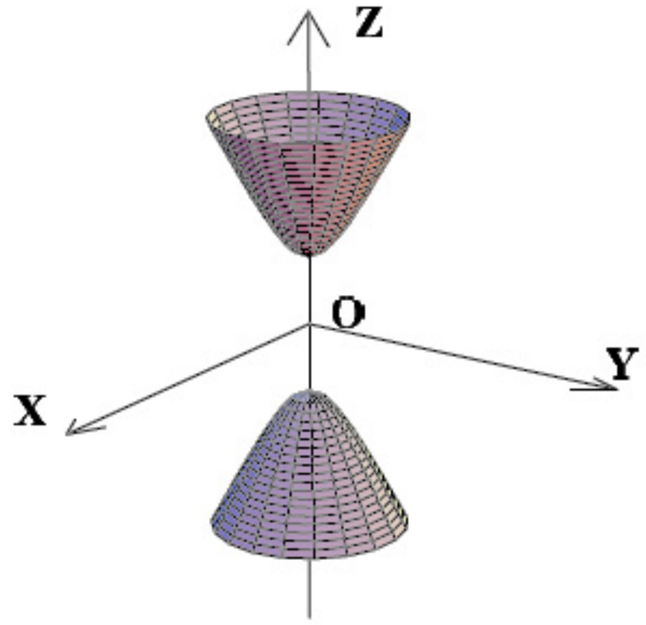
4. Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ (Hipérbole) ,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (Hipérbole)} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ (Elipse)}$$

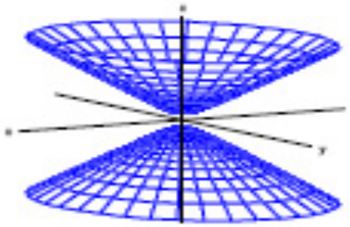
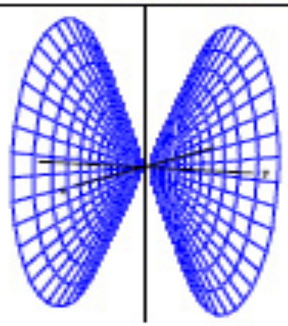
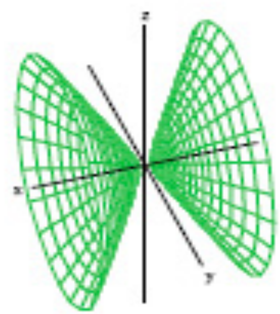


3. Hiperboloide de duas folhas

Dois sinais negativos e um positivo: Hiperboloide de duas folhas:



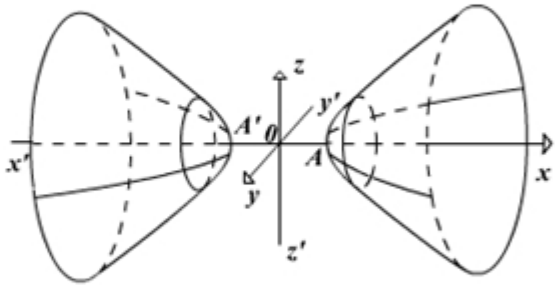
Hiperboloide de duas folhas

$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	

Hiperboloide de duas folhas

Características: Vamos analisar a seguinte equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



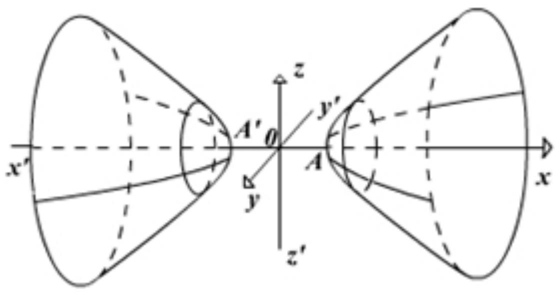
1. A superfície é simétrica em relação a todos os eixos coordenados, a todos os planos coordenados e a origem.
2. A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável cujo coeficiente é positivo na forma canônica de sua equação.I
3. Interseções com os eixos coordenados:

- ✓ Eixo Ox : $A(\pm a, 0, 0)$
- ✓ Eixo Oy: não existe
- ✓ Eixo Oz: não existe

Hiperboloide de duas folhas

4. Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ (Hipérbole)} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (Hipérbole)} \qquad \begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ (vazio)}$$



Quádricas não Cêntricas

$$(III)\begin{cases} Ax^2 + By^2 = Cz \\ Ax^2 + Bz^2 = Cy \\ Ay^2 + Bz^2 = Cx \end{cases} \quad \text{(quádricas não cêntricas)}$$

Se as constantes A, B e C são não nulas, podemos escrever as equações nas seguintes formas:

$$\begin{cases} \pm\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = cz \\ \pm\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{z^2}{b^2} = cy \\ \pm\dfrac{y^2}{a^2} \pm \dfrac{z^2}{b^2} = cx \end{cases}$$

com <u>a, b</u> números reais positivos e <u>c</u> real não nulo

Quádricas não Cêntricas

Temos duas possibilidades:

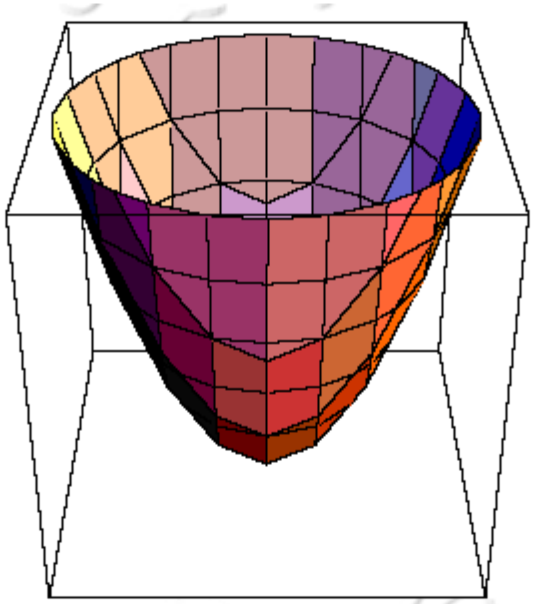
- os coeficientes dos termos de 2º. grau têm sinais iguais
- ou sinais contrários

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = cy \qquad \frac{y^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = cx$$

As possíveis combinações de sinais nesta equação nos permitem concluir a existência de apenas dois tipos de superfícies.

4. Paraboloide elíptico

Os coeficientes dos termos de 2º grau têm sinais iguais: **Paraboloide elíptico**

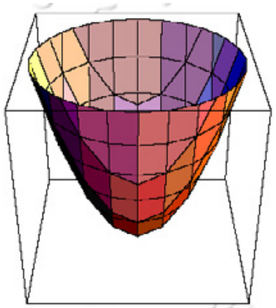


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

É uma forma canônica da equação do parabolóide elíptico ao longo do eixo dos z.

Paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$



1. A interseção da superfície com os eixos coordenados é O(0,0,0).
2. A superfície se encontra ao longo do eixo correspondente à variável do primeiro grau na forma canônica da equação.
3. Observe que para $c > 0$ temos que $z \geq 0$. Logo, a superfície se encontra inteiramente acima do plano xy.
4. A superfície é simétrica em relação ao eixo Oz, aos planos xz e yz.

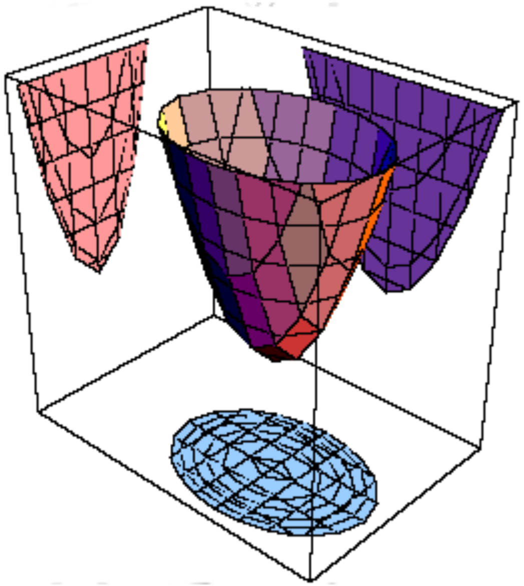
Paraboloide elíptico

5. Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases} = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = cz \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{(parábola)}$$

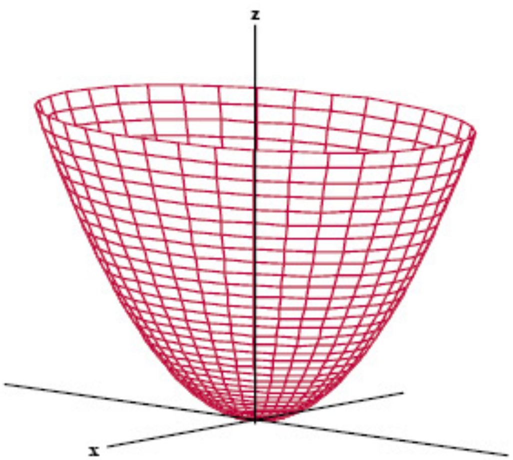
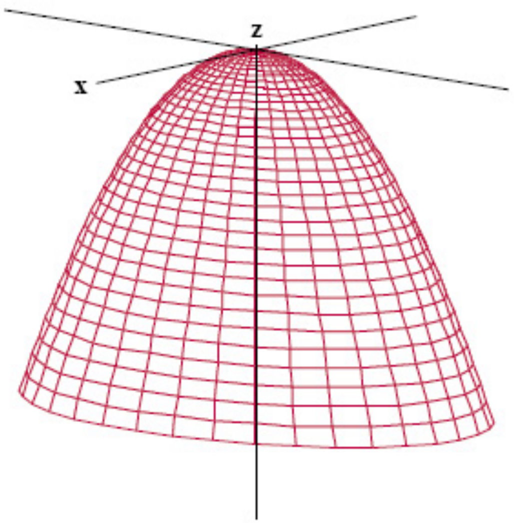
$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = cz \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{(parábola)}$$



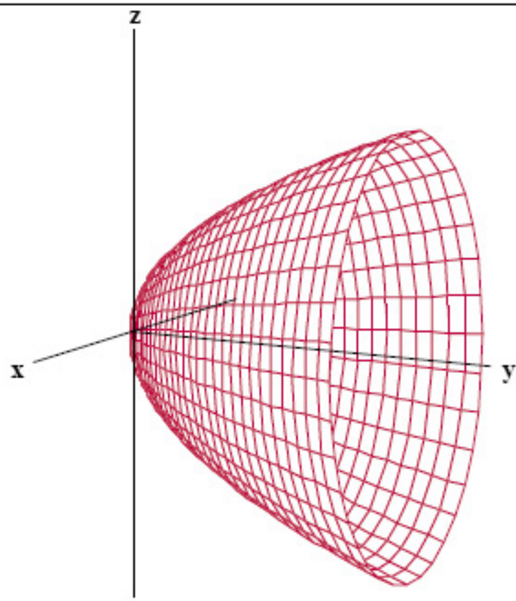
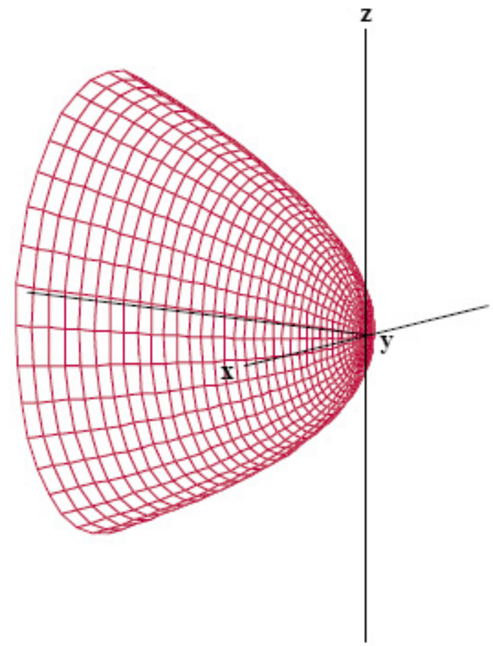
TICs

Paraboloide elíptico

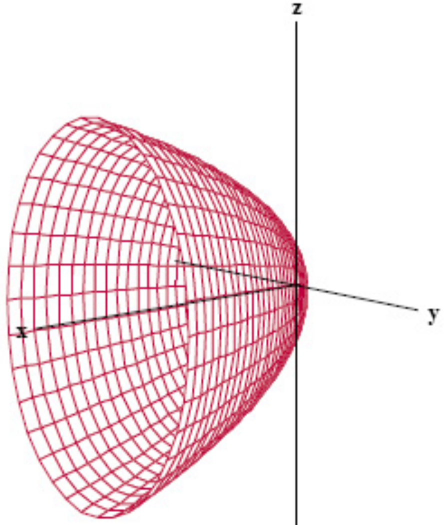
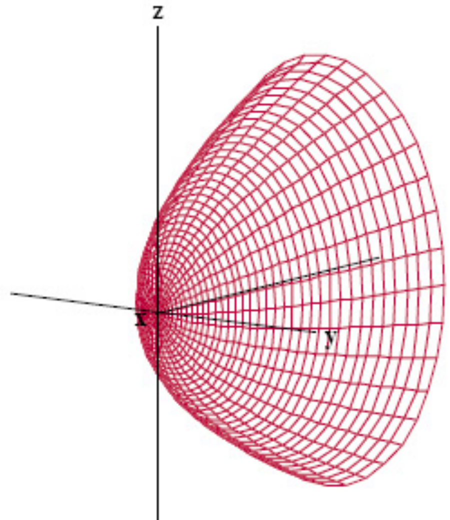
Esboço da superfície

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz \quad (c>0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz \quad (c<0)$
	

Paraboloide elíptico

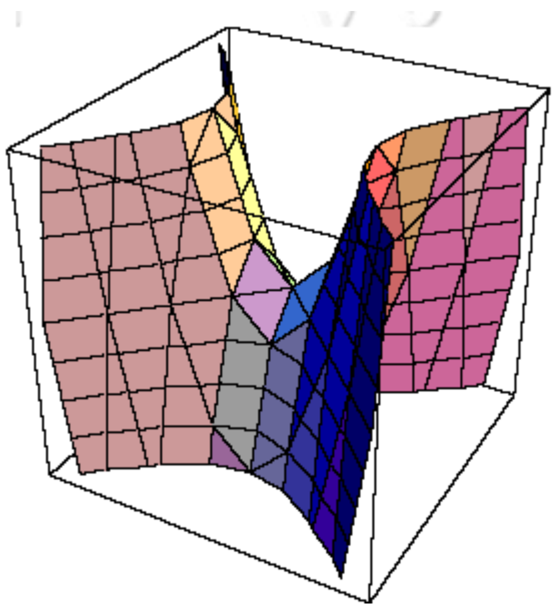
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy \quad (c>0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy \quad (c<0)$
	

Paraboloide elíptico

$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=cx \ \ (c>0)$	$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=cx \ \ (c<0)$
 	

5. Paraboloide Hiperbólico

Os coeficientes dos termos de 2º grau têm sinais contrários: **Paraboloide Hiperbólico (Sela)**

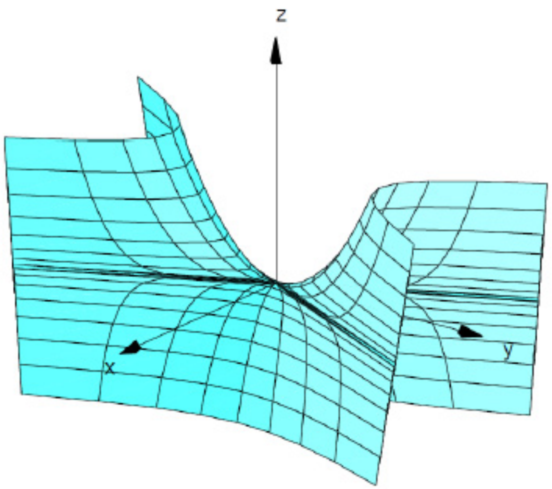


$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

Paraboloide Hiperbólico

Características: analisando a equação

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz \quad (c>0)$$



1. A interseção da superfície com os eixos coordenados é O(0,0,0).
2. A superfície se encontra ao longo do eixo correspondente à variável do primeiro grau na forma canônica da equação.
3. A superfície é simétrica em relação ao eixo Oz, aos planos xz e yz.

Paraboloide Hiperbólico

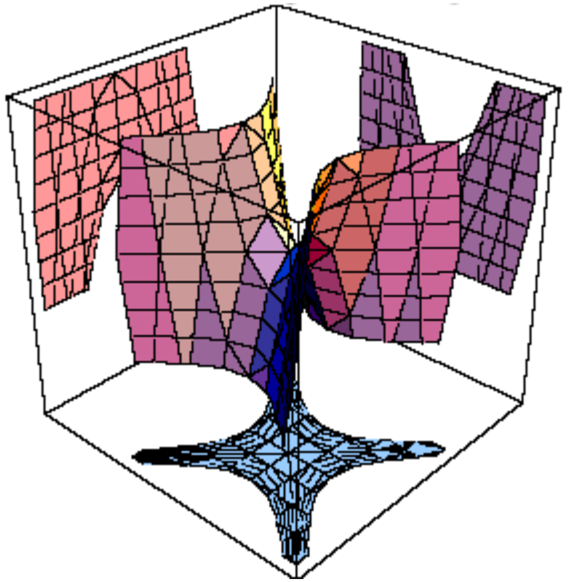
1. Traços sobre os planos coordenados:

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ z=0 \end{cases} = \begin{cases} \left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{x}{a}\right)\left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{x}{a}\right)=0 \\ z=0 \end{cases}$$, par de retas concorrentes

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}=cz \\ y=0 \end{cases}$$ (parábola)

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}=cz \\ x=0 \end{cases}$$ (parábola)

$$\begin{cases} z=1 \\ -\dfrac{x^2}{\mathrm{c}a^2}+\dfrac{y^2}{\mathrm{c}b^2}=1 \end{cases}$$ hipérbole



Exemplo

Abaixo representa-se a quádrica

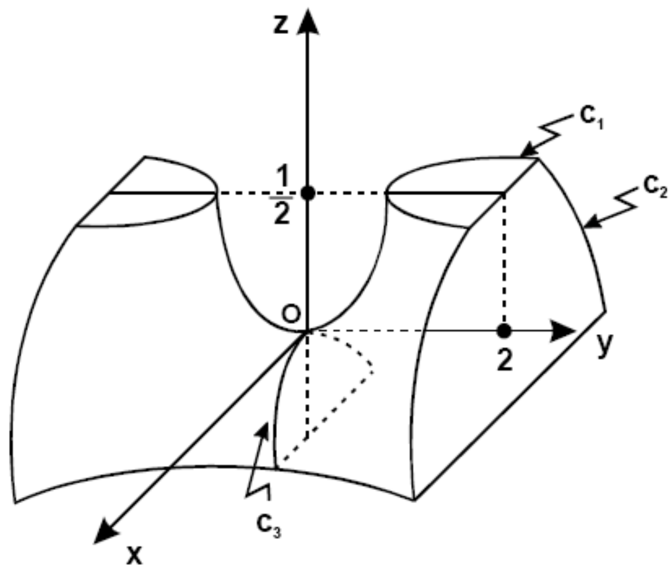
$$z = -\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4}$$

(parabolóide hiperbólico ou sela de cavalo). Podem-se:

a equação da curva c_1;

a equação da curva c_2;

a equação da curva c_3;



Exemplo

a) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left(\text{hipérbole no plano } z = \dfrac{1}{2}\right)$;

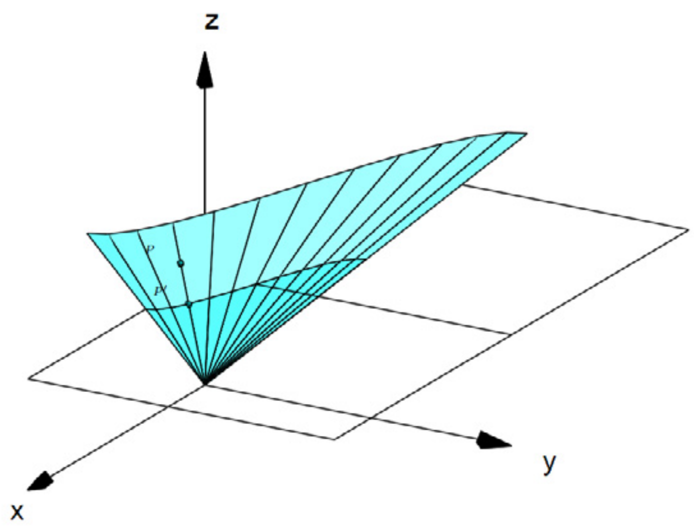
b) $\begin{cases} x^2 = -z + 1 \\ y = 2 \end{cases}$ (parábola de concavidade voltada para baixo e $V = (0, 2, 1)$)

c) $\begin{cases} x^2 = -z \\ y = 0 \end{cases}$ (parábola de concavidade voltada para baixo e $V = (0, 0, 0)$)

Superfície Cônica

Superfície Cônica

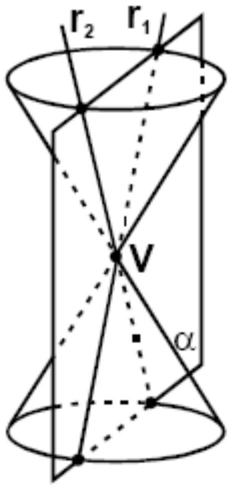
Uma superfície cônica é uma superfície que pode ser obtida quando uma reta (geratriz) se move de maneira que sempre passa por uma curva fixa, chamada diretriz, e por um ponto fixo, chamado vértice, não situado no plano da diretriz.

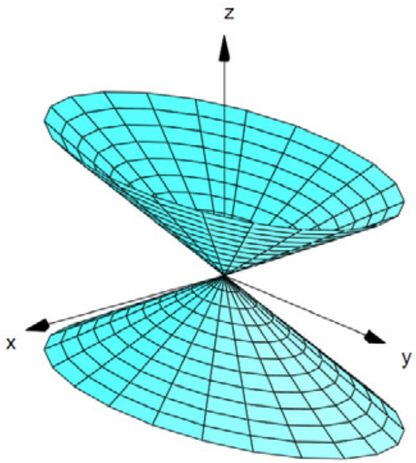


Superfície Cônica

Vamos considerar o caso particular da superfície cônica cuja diretriz é uma elipse com o vértice na origem do sistema e com seu eixo sendo um dos eixos coordenados

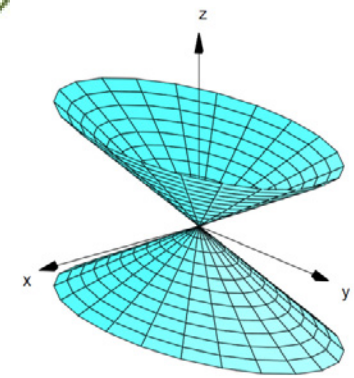
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$





Superfície Cônica

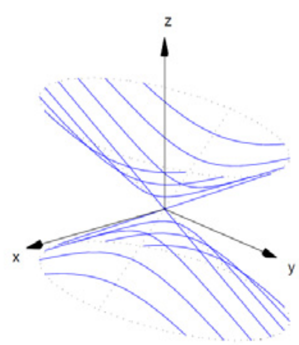
Características: analisando a equação $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



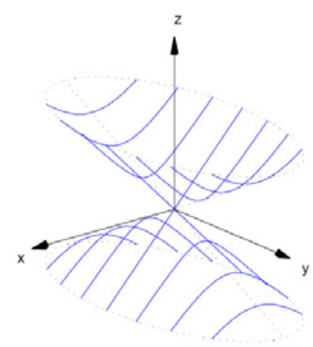
1. O traço no plano xy é o ponto O(0,0,0)
2. O traço no plano yz tem equações: $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, constituído por duas retas.
3. O traço no plano xz, de forma análoga, é constituído por duas retas que passam pela origem.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

4. Os traços no plano x = k e y = k são hipérboles.



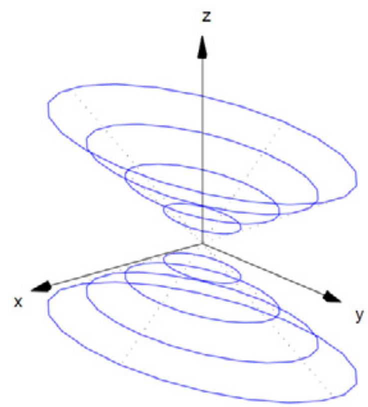
planos x= k



planos y = k

Superfície Cônica

5. Os traços nos planos z=k são elipses.



Obs.: Se |k| aumenta os eixos da elipse aumentam

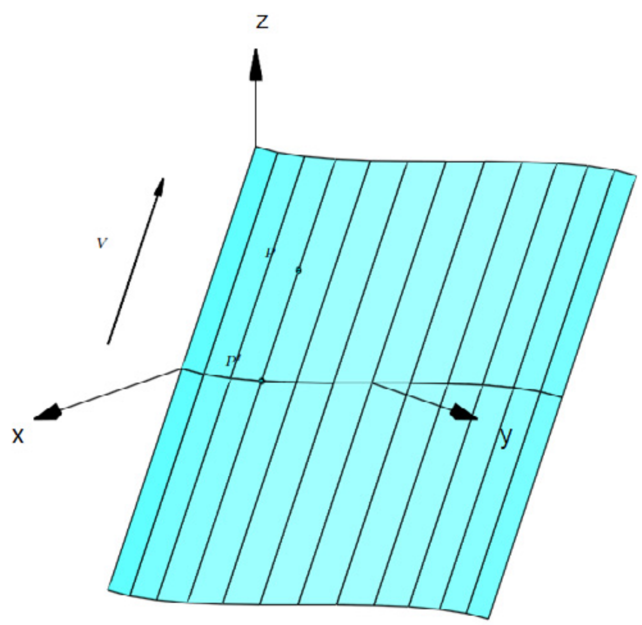
As superfícies cônicas cujos eixos são os eixos dos x e dos y, têm equações, respectivamente:

$$x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \qquad\qquad y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

Superfície Cilíndrica

Superfície Cilíndrica

É uma superfície que pode ser obtida quando uma reta, chamada geratriz move-se paralelamente passando por uma curva fixa, chamada diretriz.

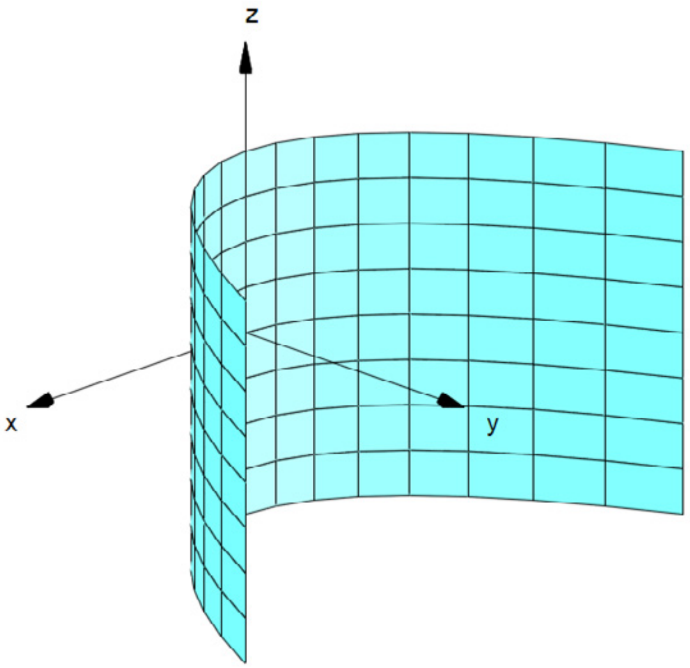


Superfície Cilíndrica

Vamos estudar apenas as superfícies cilíndricas cuja diretriz é uma curva que se encontra em dos planos coordenados e a geratriz é paralela ao eixo coordenado não contido no plano.

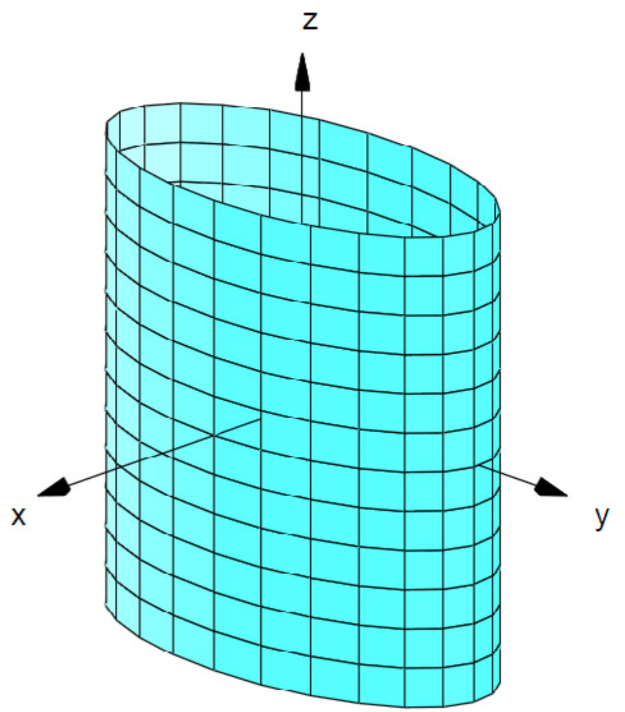
Equação da Superfície = Equação de sua Geratriz

Cilindro Parabólico



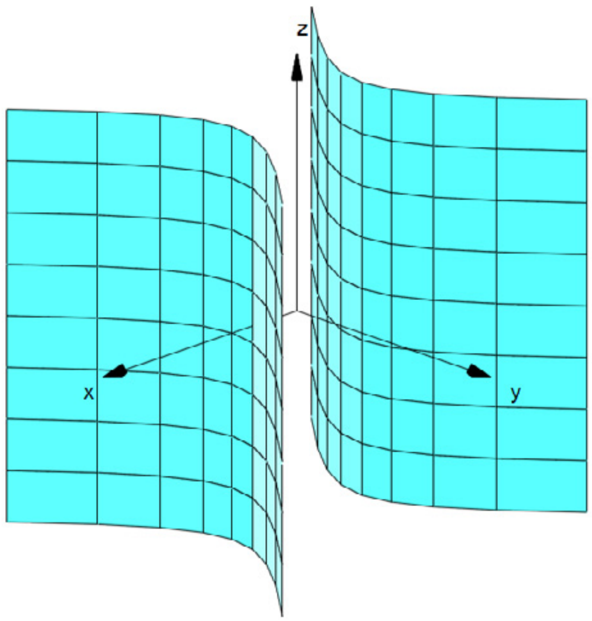
$$x^2 = 4py,\ p > 0$$

Cilindro Elíptico



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cilindro Hiperbólico



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Exercícios

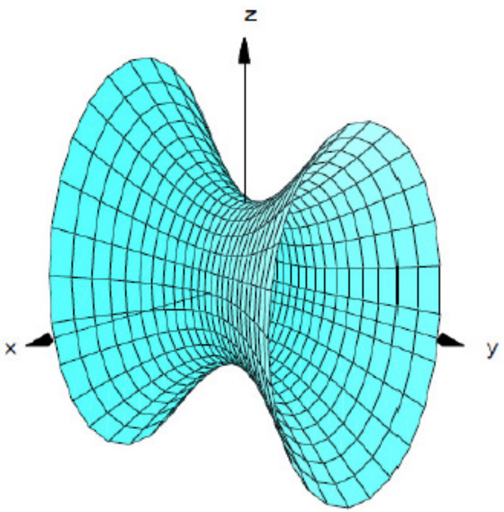
1. Reduzir cada uma das equações de forma a identificar a quádrica que ela representa.

a) $4x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$

b) $x^2 + y + z^2 = 0$

c) $x^2 - 9y^2 = 9$

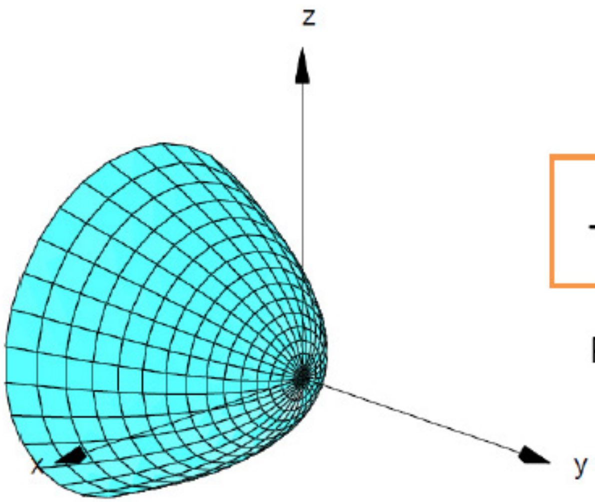
Resposta



$$\boxed{\frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{1/2} + z^2 = 1}$$

Hiperbolóide de 1 folha

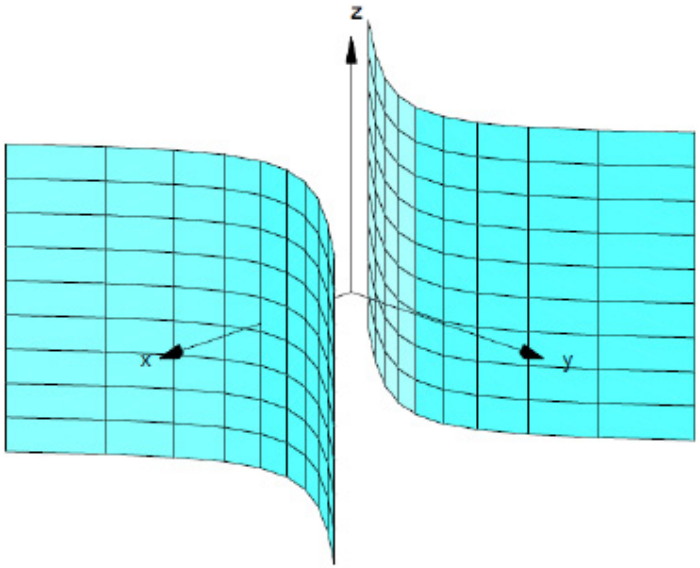
Resposta



$$-y = x^2 + z^2$$

Parabolóide elíptico

Resposta



$$\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1}$$

Cilindro hiperbólico