Cálculo Vetorial

Funções vetoriais: introdução

Prof. Vasco Ricardo Aquino da Silva

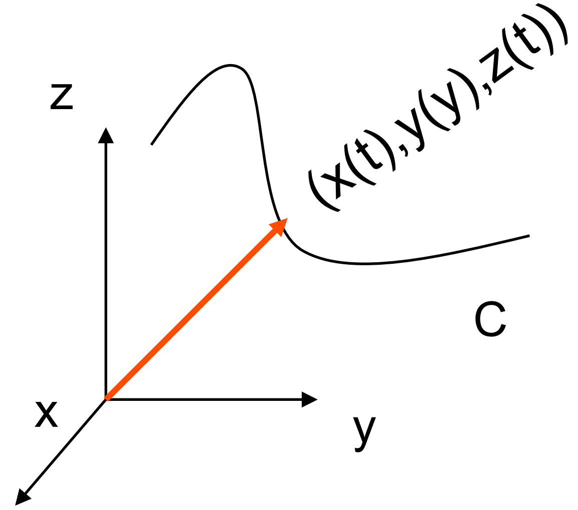
1. Definição

Seja D um subconjunto de IR. Uma função **vetorial de uma variável** , ***r***, com domínio D, é uma correspondência que a cada número real *t* de *D* associa somente um vetor ***r***(*t*) em IR^n.

$$r = r(t) = x(t)i + y(t)j \longrightarrow \text{plano}$$

ou

$$r = r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \longrightarrow \text{espaço}$$



As funções x(t), y(t) e z(t) são as componentes de r.

Ex:

$$r(t) = (t, t^2, t^3) = ti + t^2 j + t^3 k$$

2. Domínio de uma função vetorial

É o conjunto de todos os valores admissíveis para t. Quando ele não estiver especificado, convencionamos que será a intersecção dos domínios naturais das funções componentes.

EX: $r = (\ln|t-1|)i + e^t j + \sqrt{t}k$

$$x = \ln|t-1| \Rightarrow D = \Re - \{1\}$$

$$y = e^t \Rightarrow D = \Re$$

$$z = \sqrt{t} \Rightarrow D = \Re_+$$

$$D = [0,1[\cup]1,+\infty[$$

3. Gráficos de funções vetoriais

Definimos o gráfico de r(t) como a curva paramétrica descrita por suas componentes. Tal curva é traçada num sentido específico à medida que t cresce. Esse sentido é chamado de ORIENTAÇÃO ou DIREÇÃO de crescimento do parâmetro.

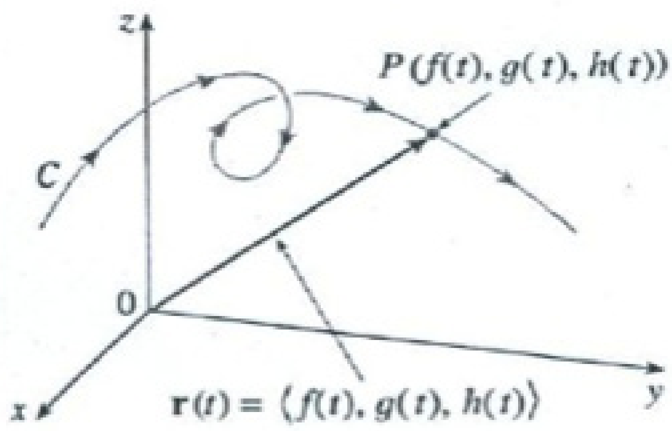
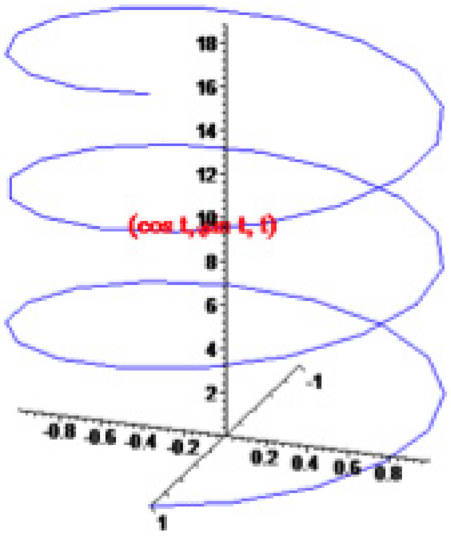


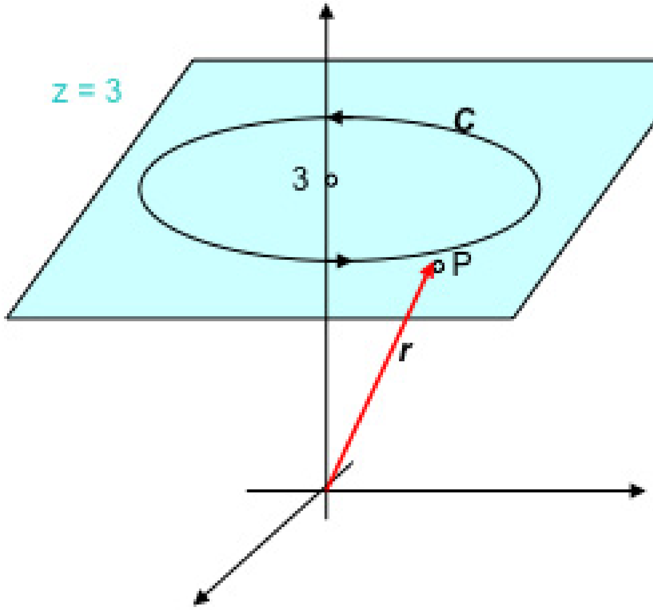
FIGURA 1
C é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição r(t).

$$EX.1 \quad r(t) = (\cos t, sent, t)$$

No plano teríamos uma circunferência de raio 1, mas a medida que *t* cresce, cresce também o valor de *z*. A combinação destes movimentos circular e para cima produz a curva denominada HÉLICE CIRCULAR.



$$EX.2 \quad r(t) = (2\cos t, 2sent, 3)$$



4. Forma vetorial de um segmento de reta

Vimos em Álgebra Linear que:

$$r = r_0 + tv$$

$$\Downarrow$$

Equação vetorial da reta

Como $v = r_1 - r_0$,temos:

$$r = r_0 + t(r_1 - r_0) \quad \text{ou} \quad r = (1-t)r_0 + tr_1$$

que a forma vetorial de uma reta por 2 pontos.

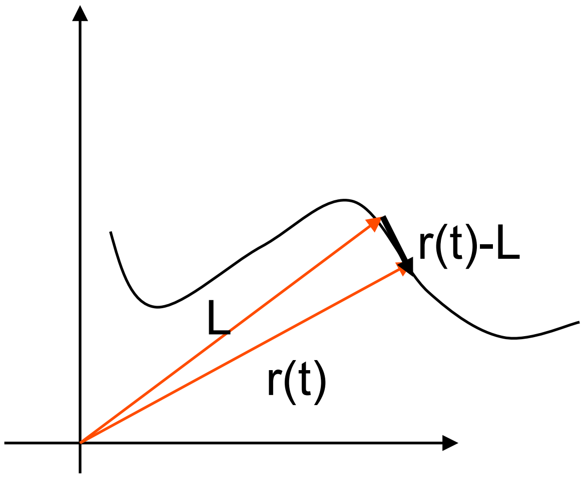
Se quisermos representar apenas o segmento que vai de r_0 a r_1 temos que restringir $0 \leq t \leq 1$.

Cálculo de funções vetoriais

5. Limites

Definição: Seja r(t) uma função vetorial definida para todo t de algum intervalo aberto contendo o número a, exceto que r(t) não precisa estar definida em a. Escrevemos:

$$\lim_{t \to a} r(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t \to a} \left| r(t) - L \right| = 0$$



$\left| r(t) - L \right|$ é a distância entre os pontos finais de r(t) e L quando esses vetores estão posicionados com mesmo ponto inicial.

Teorema

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{t \to a} r(t) = \lim_{t \to a} x(t)i + \lim_{t \to a} y(t)j + \lim_{t \to a} z(t)k$$

Sempre que existirem os limites das funções componentes.

Exemplo:

Seja a função vetorial: $f(t) = \left\langle t^2, \dfrac{8-t^3}{4-t^2}, \ln t \right\rangle$, encontre o limite da função quando $t \to 2$.

$$\lim_{t\to 2} f(t) = \left\langle \lim_{t\to 2} t^2, \lim_{t\to 2} \frac{8-t^3}{4-t^2}, \lim_{t\to 2} \ln(t) \right\rangle$$

$$\lim_{t\to 2} x(t) = 4$$

$$\lim_{t\to 2} z(t) = \ln(2)$$

$$\lim_{t\to 2} y(t) = \lim_{t\to 2} \frac{8-t^3}{4-t^2} \qquad \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{t\to 2} \frac{8-t^3}{4-t^2} = \lim_{t\to 2} \frac{-3t^2}{-2t} \qquad \lim_{t\to 2} \frac{8-t^3}{4-t^2} = \lim_{t\to 2} \frac{3t}{2} \qquad \lim_{t\to 2} \frac{8-t^3}{4-t^2} = 3$$

$$\lim_{t\to 2} f(t) = \langle 4, 3, \ln(2) \rangle$$

6. Continuidade

Dizemos que uma função vetorial é contínua em *x=a* se:

$$i)\exists r(a)$$

$$ii)\exists \lim_{t\to a} r(t)$$

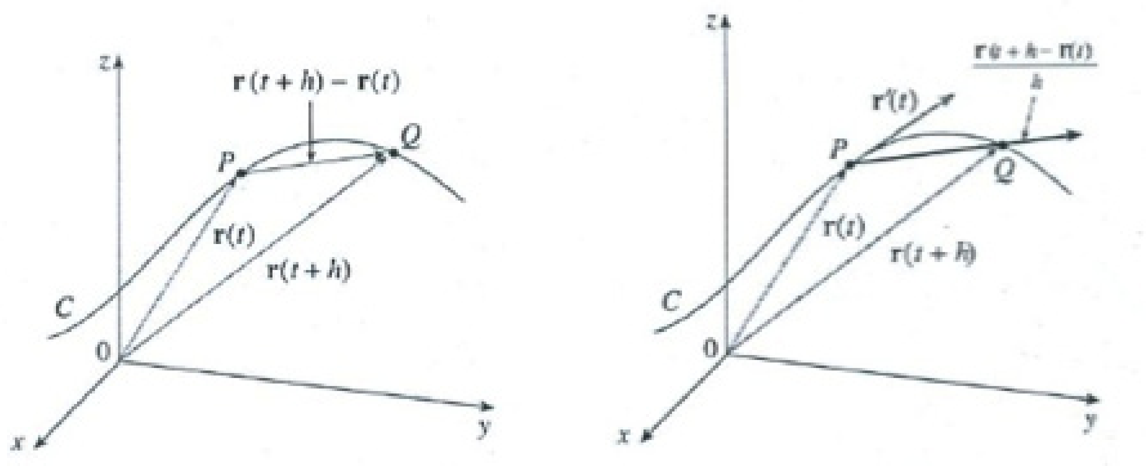
$$iii) r(a) = \lim_{t\to a} r(t)$$

Funções vetoriais: introdução

7. Derivadas

Definição: Se r(t) for uma função vetorial, definimos a derivada de r em relação a t como a função vetorial r' dada por:

$$r'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{r(t+h)-r(t)}{h}$$



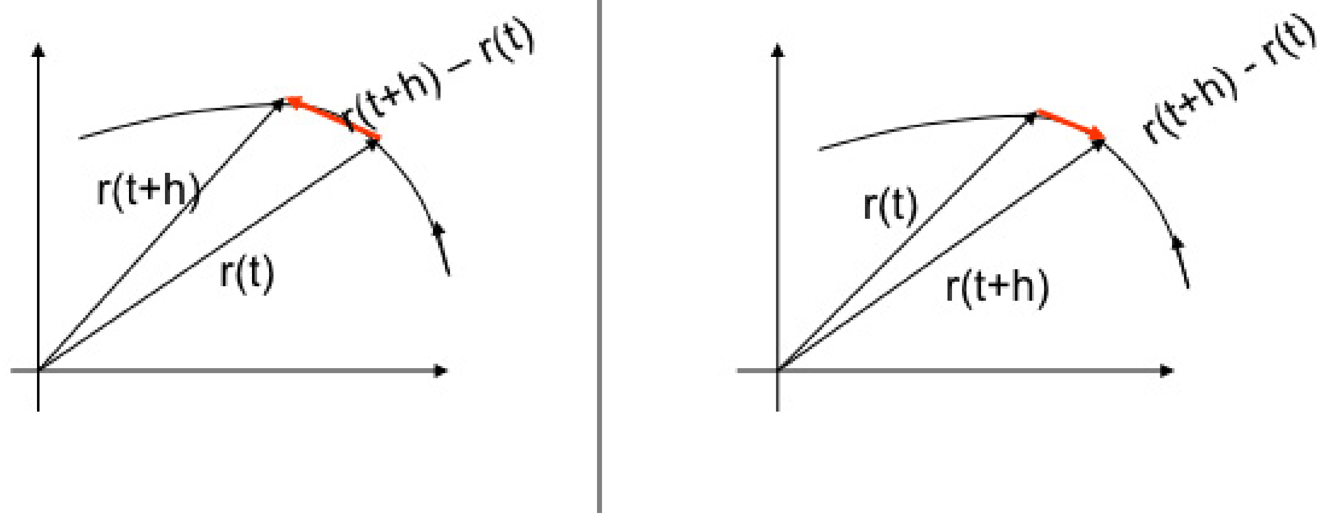
(a) Vetor secante

(b) Vetor tangente

Notações: $\frac{d}{dt}r(t);\frac{dr}{dt};r'(t);r'$

8. Interpretação geométrica da derivada

1º CASO: $h > 0$ 2º CASO: $h < 0$

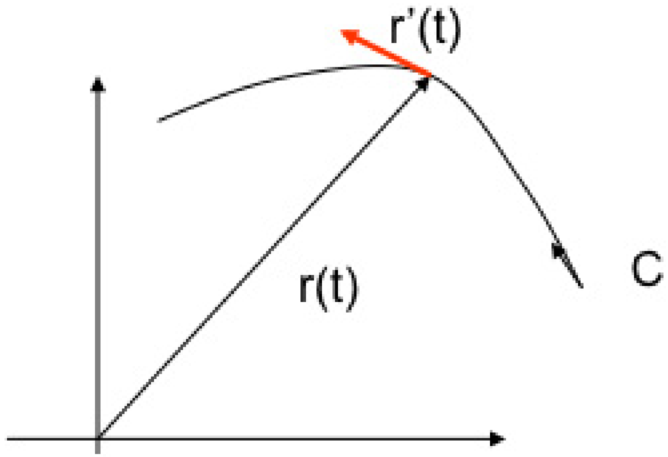


Observe que o vetor: $\dfrac{r(t+h)-r(t)}{h}$ aponta na direção do parâmetro crescente e percorre a reta secante.

Funções vetoriais: introdução

Conclusão

r'(t) é tangente a C e aponta na direção do parâmetro crescente.



Teorema

$$r(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right) \Rightarrow r'(t) = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$$

$$Ex: \quad r(t) = t^2 i + e^t j - (2\cos\pi t)k$$

$$r'(t) = 2ti + e^t j + (2\pi sen\pi t)k$$

9. Regras de derivação

Sejam $r_1(t)$ e $r_2(t)$ funções vetoriais, $f(t)$ uma função real, K um escalar real e c um vetor constante. Então valem as seguintes regras:

$$a)\ \frac{d}{dt}\left[c\right]=0$$

$$b)\ \frac{d}{dt}\left[kr(t)\right]=k\frac{d}{dt}\left[r(t)\right]$$

$$c)\ \frac{d}{dt}\left[r_1(t)\pm r_2(t)\right]=\frac{d}{dt}\left[r_1(t)\right]\pm\frac{d}{dt}\left[r_2(t)\right]$$

$$d)\ \frac{d}{dt}\left[f(t)r(t)\right]=f(t).\frac{d}{dt}\left[r(t)\right]+\frac{d}{dt}\left[f(t)\right]r(t)$$

$$e)\ \frac{d}{dt}\left[r_1(t)r_2(t)\right]=r_1(t).\frac{d}{dt}\left[r_2(t)\right]+\frac{d}{dt}\left[r_1(t)\right]r_2(t)$$

$$f)\ \frac{d}{dt}\left[r_1(t)\times r_2(t)\right]=r_1(t)\times\frac{d}{dt}\left[r_2(t)\right]+\frac{d}{dt}\left[r_1(t)\right]\times r_2(t)$$

ATENÇÃO! Cuidado com a ordem!

Teorema

Se r(*t*) for uma função vetorial (bi ou tridimensional) e |r(*t*)|=*k*, *k* constante, para todo *t*, então:

$$r(t).r'(t) = 0$$

Demonstração:

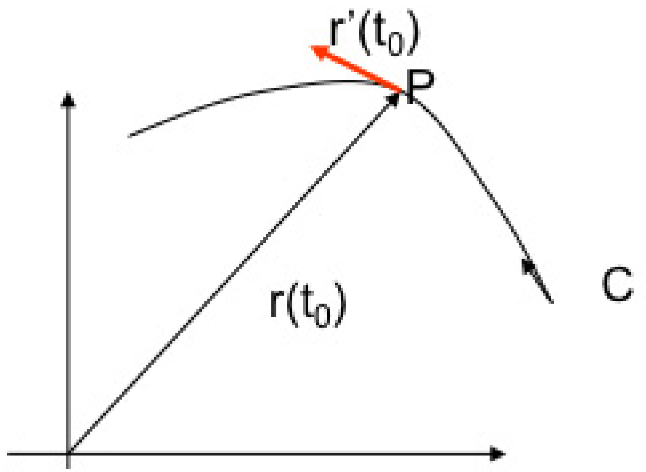
Sejam $r_1(t)= r_2(t)= r(t)$.

$$\frac{d}{dt}\left[r(t).r(t)\right] = r(t)\frac{d}{dt}r(t) + \frac{d}{dt}r(t).r(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[|r(t)|^2\right] = 2r(t)\frac{d}{dt}r(t)$$

$$0 = 2r(t)\frac{d}{dt}r(t) \Rightarrow r(t).r'(t) = 0$$

10. Retas tangentes a gráficos de funções vetoriais



Definição: Seja P um ponto no gráfico de uma função vetorial r(t) e seja r(t_0) o vetor posição da origem a P. Se r'(t_0) existir e for diferente de zero, então dizemos que r'(t_0) é um vetor **tangente** ao gráfico de r(t) em r(t_0) e a reta que passa por P que é paralela ao vetor tangente é denominada **reta tangente** ao gráfico de r(t) em r(t_0).

Equação da reta tangente

$$r = r(t_0) + t.r'(t_0)$$

Exemplo:

Obtenha as equações paramétricas da reta tangente à hélice circular x=cos t, y=sen t e z=t, no ponto em que t= π .

$$r = r(t_0) + t.r'(t_0)$$

$$r(\pi) = (\cos\pi, sen\pi, \pi) = (-1,0,\pi)$$

$$r'(t) = (-sent, \cos t, 1)$$

$$r'(\pi) = (-sen\pi, \cos\pi, 1) = (0,-1,1)$$

$$r = (-1,0,\pi) + t.(0,-1,1)$$

$$x(t) = -1$$

$$y(t) = -t$$

$$z(t) = \pi + t$$

11. Integrais

$$\int_a^b r(t)dt = \left(\int_a^b x(t)dt\right)i + \left(\int_a^b y(t)dt\right)j + \left(\int_a^b z(t)dt\right)k$$

Exemplo: $r(t) = t^2 i + e^t j - (2\cos \pi t)k$

$$\int_0^1 r(t)dt = \left(\int_0^1 t^2 dt\right)i + \left(\int_0^1 e^t dt\right)j + \left(\int_0^1 (-2\cos \pi t)dt\right)k$$

$$= \left.\frac{t^3}{3}\right]_0^1 i + e^t\Big]_0^1 j - 2\pi sen\pi t\Big]_0^1 k$$

$$= \frac{1}{3}i + (e-1)j$$

Regras de integração

$$a)\int_a^b k r(t)dt = k\int_a^b r(t)dt$$

$$b)\int_a^b \left[r_1(t) \pm r_2(t)\right]dt = \int_a^b r_1(t)dt \pm \int_a^b r_2(t)dt$$

Antiderivadas de função vetorial

Uma antiderivada de uma função vetorial r(t) é uma função vetorial R(t) tal que:

$$R'(t) = r(t)$$

Em notação de integral: $\int r(t)dt = R(t) + C$

Vetor constante arbitrário