Cálculo Vetorial

Parametrizações lisas,comprimento de arco e integrais curvilíneas

Prof. Vasco Ricardo Aquino da Silva

Parametrizações lisas

1. Parametrizações lisas

Dizemos que r(t) é uma parametrização lisa ou uma função lisa de t se r'(t) for contínua e r'(t) ≠0 para quaisquer valores admissíveis de t.

- **Significado algébrico:** as componentes de r(t) tem derivadas contínuas e que não são todas nulas para um mesmo valor de t.

- **Significado geométrico:** o vetor tangente r'(t) varia continuamente ao longo da curva.

$$r'(t) = (-a\,sen\,t, a\cos t, c) \qquad r'(t) \neq 0 \quad \forall t\,), c > 0)$$

Funções contínuas

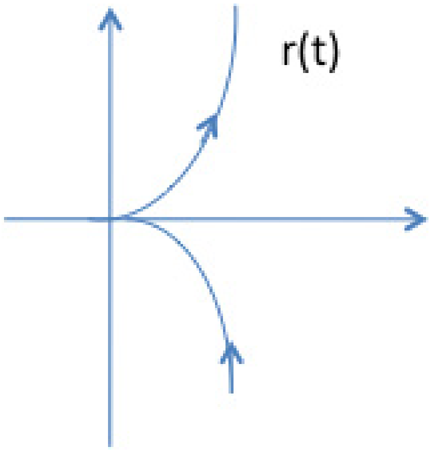
r(t) é uma parametrização lisa.

Ex.2 $$r(t) = t^2 i + t^3 j$$

$$r'(t) = (2t, 3t^2)$$

$$t = 0 \Rightarrow r'(t) = 0$$

r(t) não é uma parametrização lisa.



Observe que há uma súbita reversão de sentido do vetor tangente quando t cresce e passa por t=0.

2. Comprimento de arco

TEOREMA: Se C for o gráfico no espaço bi ou tridimensional de uma função vetorial lisa r(t), então seu comprimento de arco L de t=a a t=b é:

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Ex: Determine o comprimento de arco da parte da hélice circular *x*=cos *t*, *y*=sen *t*, *z*=*t* de *t*=0 a *t*=π.

$$r'(t) = (-sent, \cos t, 1)$$

$$|\mathrm{r}'(\mathrm{t})| = \sqrt{(-\mathrm{sent})^2 + (\cos \mathrm{t})^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

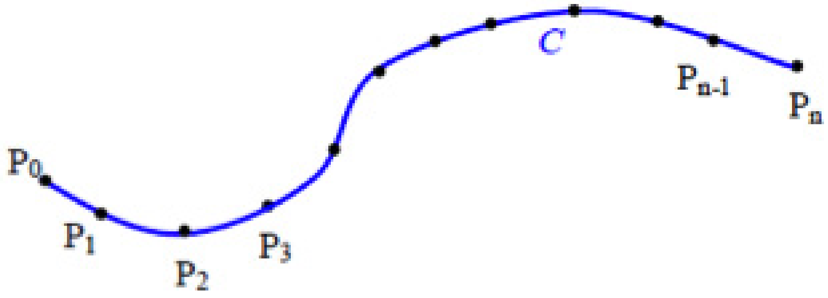
$$L = \int_0^\pi \sqrt{2} dt = \sqrt{2}t \Big|_0^\pi = \sqrt{2}\pi \ u.c.$$

3. Integrais de linha ou integrais curvilíneas

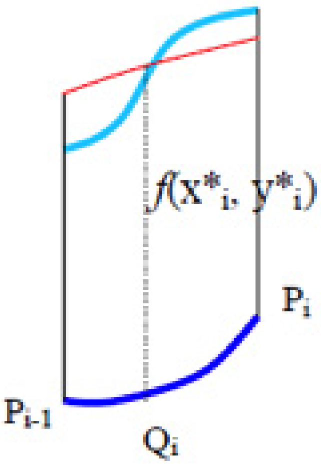
Problema:

Consideremos uma curva C unindo dois pontos no plano XOY e uma função $z = f(x, y)$ contínua em D onde D é uma região do plano contendo a curva C. Um muro é construído ao longo de C e tem altura igual a $f(x, y)$ (supondo que f seja não negativa em D) em cada ponto (x,y) de C. Qual é a área deste muro?

Para resolver o problema nós tomamos um partição da curva C obtendo n arcos pela introdução de n-1 pontos em C entre os seus extremos.



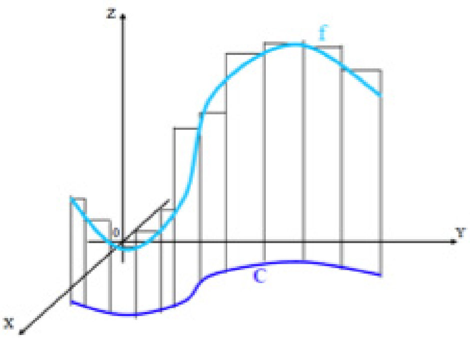
Vejamos uma aproximação para a área da i-ésima tira, Ai. Para isso, tomemos no i-ésimo arco, P_{i-1} P_i, um ponto $Q_i(x^*_i, y^*_i)$ e consideremos a altura $f(x^*i, y^*_i)$ do muro neste ponto.



O comprimento do arco P_{i-1} P_i denotaremos por s_i.
Como f é uma função contínua e a i-ésima tira é estreita podemos aproximar o valor de f para $f(x^*_i, y^*_i)$ em todo (x, y) do arco P_{i-1} P_i. Assim, a área da i-ésima tira é aproximada por $\Delta A_i \approx f(x^*_i, y^*_i)\, \Delta s_i$ enquanto a área do muro tem aproximação $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x^*_i, y^*_i)\, \Delta s_i$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x^*_i, y^*_i)\, \Delta s_i$$

Integrais curvilíneas



$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x^*_i, y^*_i)\, \Delta s_i$$

Integral de linha ou curvilínea da função *f* ao longo da curva *c*

$$A = \int_C f(x, y)\, ds$$

4. Cálculo de integrais de linha

Consideremos uma parametrização para a curva suave e limitada C dada pela função vetorial $r(t) = (x(t), y(t))$ com $t \in [a, b]$

Sabemos que: $s = \int_a^b |r'(t)|\,dt$

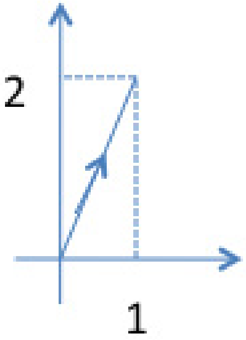
Portanto: $ds = |r'(t)|\,dt$

Assim: $\int_c f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\,|r'(t)|\,dt$

Analogamente: $\int_c f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\,|r'(t)|\,dt$

Ex. 1 Sendo C: r(t)= t i +2t j, 0≤t ≤1, calcule $\int_C (1+xy^2)ds$

$$r(0) = (0,0)$$
$$r(1) = (1,2)$$



$$r(t) = (t,2t)$$
$$r'(t) = (1,2)$$
$$|r'(t)| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\int_C (1+xy^2)ds = \int_0^1 [1+t(2t)^2]\sqrt{5}dt =$$

$$= \sqrt{5}\int_0^1 (1+4t^3)dt = \sqrt{5}\Big[t+t^4\Big]_0^1 = \sqrt{5}(1+1) = 2\sqrt{5}$$

5. Integrais de linha em relação a *x*, *y* e z

$$\int_c f(x,y)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x^*_i, y^*_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt$$

$$\int_c f(x,y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x^*_i, y^*_i)\,\Delta y_i = \int_a^b f(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt$$

Ou no espaço-3D

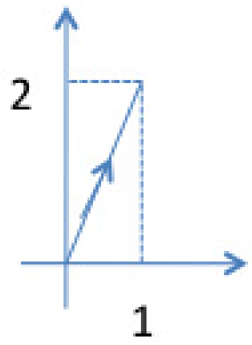
$$\int_c f(x,y,z)\,dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\,x'(t)\,dt$$

$$\int_c f(x,y,z)\,dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\,y'(t)\,dt$$

$$\int_c f(x,y,z)\,dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\,dt$$

Exemplo

Calcule $\int_C 3xy\,dy$,onde C é o segmento de reta ligando (0,0) à (1,2), nesta ordem.



$$x(t) = (1-0)t = t$$
$$y(t) = (2-0)t = 2t$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$$\int_C 3xy\,dy = \int_0^1 3(t)(2t)2dt = \int_0^1 12t^2dt = 4t^3\Big]_0^1 = 4$$

6. Propriedades da integral de linha

São análogas as da integral definida:

$$\int_C [f(x,y)+g(x,y)]ds = \int_C f(x,y)ds + \int_C g(x,y)ds$$

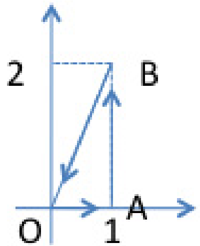
$$\int_C k \cdot f(x,y)ds = k\int_C f(x,y)ds$$

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds$$

Esta última é muito utilizada quando a curva é parcialmente lisa.

Exemplo:

Determine $\int_C xyds$ **para a curva C:** $\overline{OA} \cup \overline{AB} \cup \overline{BO}$ **conforme figura:**



$$\int_C xyds = \int_{C_1} xyds + \int_{C_2} xyds + \int_{C_3} xyds$$

Parametrizando as curvas:

$$C_1 : \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 0 + 0t \end{cases}$$
$$r_1(t) = (t,0)$$
$$0 \le t \le 1$$
$$r_1'(t) = (1,0)$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = 0 + 2t \end{cases}$$
$$r_1(t) = (1,2t)$$
$$0 \le t \le 1$$
$$r_1'(t) = (0,2)$$

$$C_3 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$
$$r_1(t) = (1 - t, 2 - 2t)$$
$$0 \le t \le 1$$
$$r_1'(t) = (-1,-2)$$

$$\int_C xyds = \int_{C_1} xyds + \int_{C_2} xyds + \int_{C_3} xyds$$

$$\int_C xyds = \int_0^1 t.0ds + \int_0^1 1.(2t)ds + \int_0^1 (1-t)(2-2t)ds =$$

$$\int_0^1 (2t)2dt + \int_0^1 (2-4t+2t^2)\sqrt{5}dt =$$

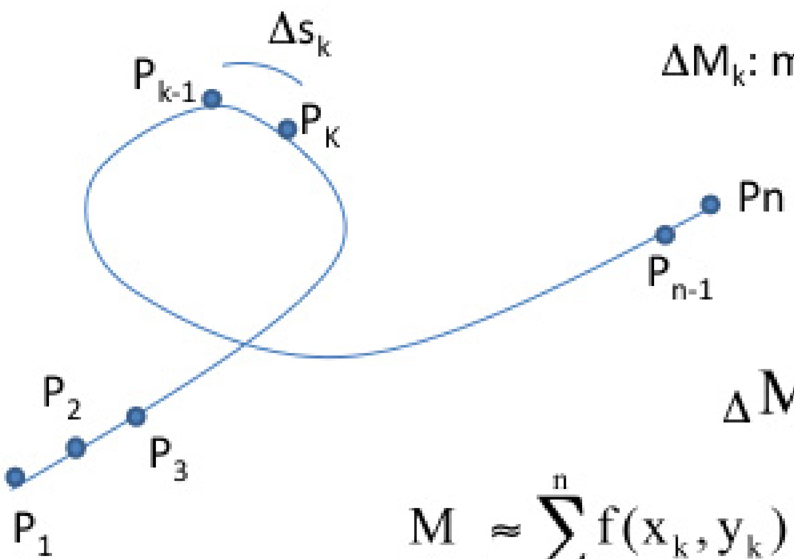
$$\left. 2t^2 \right]_0^1 + \sqrt{5}\left[2t - 2t^2 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 =$$

$$(2-0) + (2-2+\frac{2}{3})\sqrt{5} = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{5}$$

Integrais curvilíneas

1. Aplicações

Seja $f(x,y)$ um valor que corresponde a densidade de massa linear (massa por unidade de comprimento) de um fio metálico no ponto (x,y).



ΔM_k: masa da k-ésima seção.

$$f(x_k, y_k) \approx \frac{\Delta M_k}{\Delta s_k}$$

$$\Delta M_k \approx f(x_k, y_k)\,\Delta s_k$$

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta s_k$$

$$M = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta s_k$$