TICs

Cálculo Vetorial

Campos vetoriais

Prof. Vasco Ricardo Aquino da Silva

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL SEED/MEC
CAPES
INSTITUTO FEDERAL SUL-RIO-GRANDENSE

1. Campo escalar x Campo vetorial

Campo: região do espaço onde há grandezas associadas a seus pontos.
Campo escalar: associa um escalar a cada ponto do espaço.
Campo vetorial: associa um vetor a cada ponto do espaço.

Exemplo:

A temperatura de uma piscina é um campo escalar: a cada ponto podemos associar um valor escalar para a temperatura. O fluir da água nessa mesma piscina é um campo vetorial: a cada ponto podemos associar um vetor velocidade.

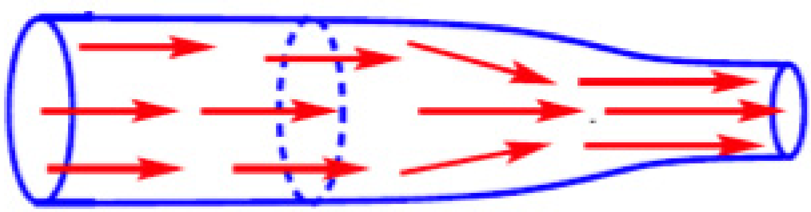
Definição: Um campo vetorial no plano é uma função que associa a cada ponto P do plano um único vetor F(P) paralelo ao plano.

$$F(x,y) = f(x,y)\vec{i} + g(x,y)\vec{j}$$

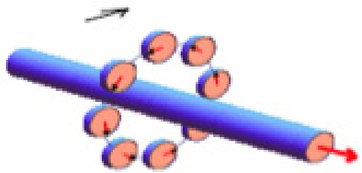
No espaço tridimensional:

$$F(x,y,z) = f(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k}$$

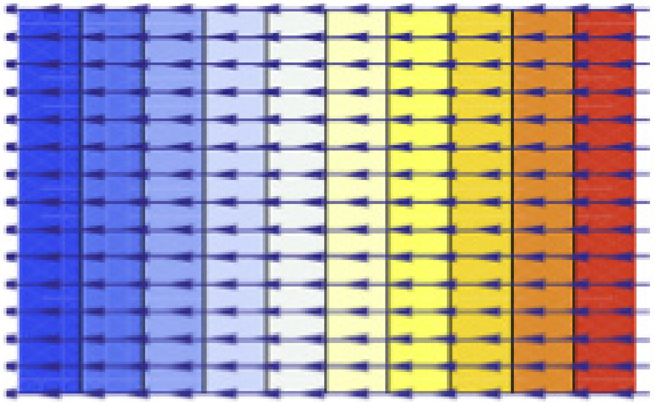
Exemplo:



Campo de velocidade de um fluido:



Campo magnético.



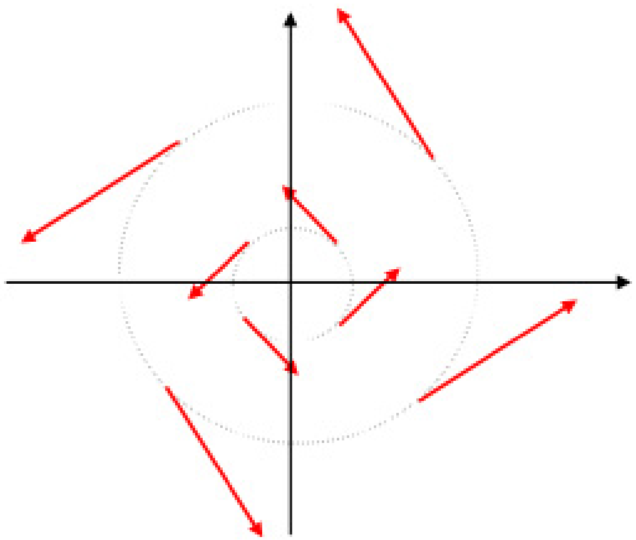
Calor numa placa

Representações gráficas de campos vetoriais

Ex.1 : F(x, y) = (-y, x)

(x, y)	(1, 1)	(-1, 1)	(-1, -1)	(1, -1)	(1, 3)	(-3, 1)	(-1, -3)	(3, -1)
F(x, y)	(-1, 1)	(-1, -1)	(1, -1)	(1, 1)	(-3, 1)	(-1, -3)	(3, -1)	(1, 3)

Obs: costuma-se representar o vetor F(x,y) com origem no ponto P(x,y).

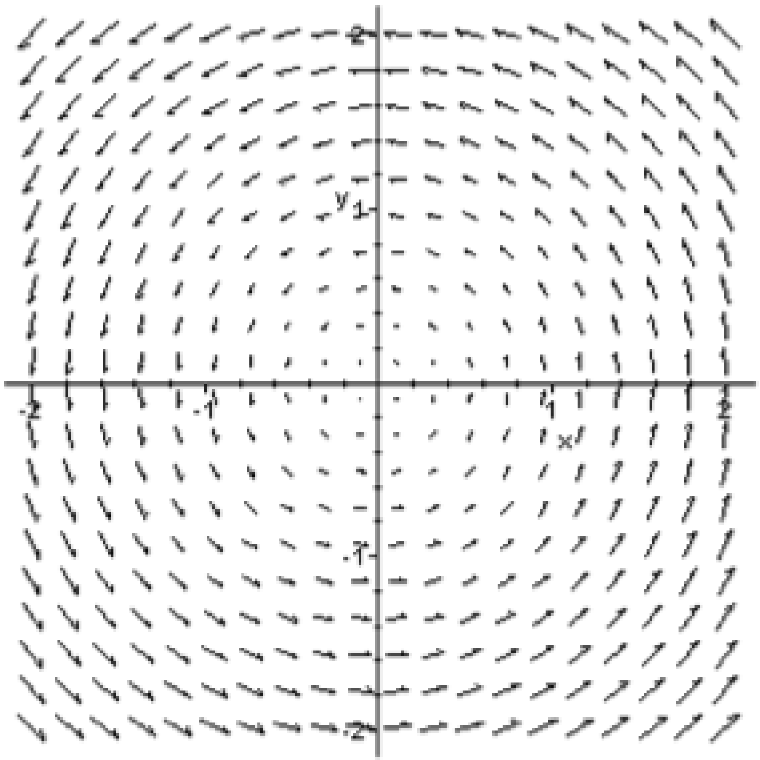


Sendo r(x,y) = (x,y) a função vetorial que nos dá o vetor posição do ponto (x,y) do espaço-2D, temos r(x, y) e F(x, y) são ortogonais em cada ponto (x, y), pois :

$(x, y) \cdot (-y, x) = x\,(-y) + yx = 0.$

Campos vetoriais

Os vetores deste campo vetorial representam um campo de velocidade de uma roda em movimento.



Campos vetoriais

2. Campos de Quadrado Inverso

Pela Lei da Gravitação Universal de Newton, dois corpos de massas *m* e *M* se atraem com uma força *F* de grandeza:

Onde: *G* é a constante gravitacional ; *r* é a distância entre os dois corpos

Vamos supor que o objeto de massa *M* se encontra na origem de um sistema de coordenadas XYZ e **r**(*x*, *y*, *z*) é o vetor posição do objeto de massa *m*. Então *r* =| *r* | e a força **F(*r*)** exercida pelo objeto de massa *M* sobre o outro tem a direção e o sentido do vetor unitário **u = -*r* / |*r* |** . Assim:

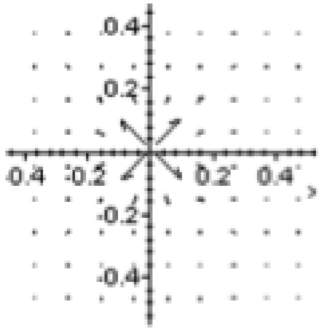
$$F(r) = \frac{GmM}{|\vec{r}|^2}\, u = -\frac{GmM}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\frac{GmM}{r^3}\, r.$$

Fazendo *k* = –*GmM* obtemos:

Um campo deste tipo é chamado CAMPO DE QUADRADO INVERSO.

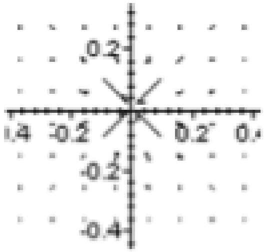
Para pensar...

Para onde está direcionado o campo quando $k>0$?



Para longe da origem!

Para onde está direcionado o campo quando $k<0$?



Para a origem!

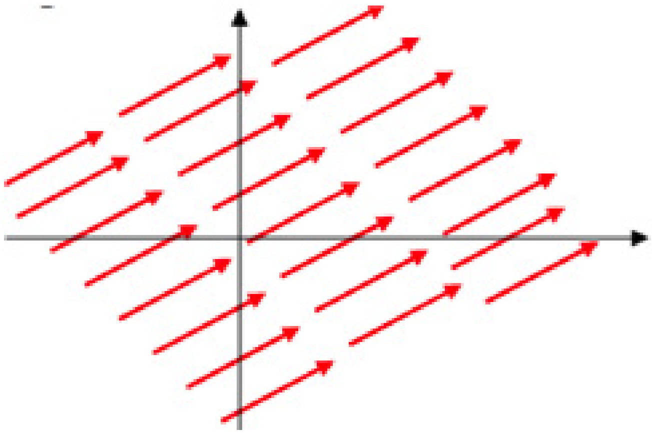
3. Campos Gradiente

Se f é uma função escalar (de duas ou mais variáveis), então o gradiente ∇f, de f é um campo vetorial chamado **campo gradiente** de f.

- $F(x, y) = \nabla f(x, y) = (f_x (x, y),\ f_y (x, y)).$
- $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = (f_x (x, y, z),\ f_y (x, y, z),\ f_z (x, y, z)).$

Exemplo:

Dada a função $f(x,y)=3x+2y$, o campo gradiente de f é:



$$F(x, y) = \nabla f(x, y) = (f_x (x, y),\ f_y (x, y))$$

$$F(x, y) = (3, 2)$$

4. O operador ∇ (dell)

O operador diferencial vetorial ∇ no espaço 3D é:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathbf{k}}$$

Aplicando o operador ∇ sobre uma função escalar $f(x,y,z)$ obtemos o campo gradiente de f.

$$\nabla f(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,\vec{\mathbf{k}}$$

Aplicando o operador ∇ sobre uma função vetorial F podemos obter o ROTACIONAL de *F* ou a DIVERGÊNCIA de *F*.

5. Divergência

Seja $F(x,y,z)=F_1(x,y,z)i+F_2(x,y,z)j+F_3(x,y,z)k$ onde F_1, F_2 e F_3 são funções escalares com derivadas parciais em alguma região D. O produto escalar formal entre ∇ e F é chamado a DIVERGÊNCIA do campo F e é denotado por:

$$\boxed{div(F)(x,y,z) = \nabla \cdot F(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)}$$

Se imaginarmos um campo de vetores como um campo de velocidades de um gás ou de um fluido, então a divergência do campo está relacionada com a expansão ou a contração do volume do gás pelo fluxo do campo.

$div(F)>0$: expansão
$div(F)=0$: não tem expansão nem contração (F é incompressível)
$div(F)<0$: contração

6. Rotacional

Seja $F(x,y,z)=F_1(x,i,z)i+F_2(x,y,z)j+F_3(x,y,z)k$ onde F_1, F_2 e F_3 são funções escalares com derivadas parciais em alguma região D. O produto vetorial formal entre e F é chamado ROTACIONAL do campo F e é denotado por:

$$\boxed{rot\,F = \nabla \times F = \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right]\vec{\mathrm{i}} + \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right]\vec{\mathrm{j}} + \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right]\vec{\mathrm{k}}}$$

$$\mathrm{rot}\,F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Obs: O rotacional só pode ser calculado para campos vetoriais do espaço -3D.

Exemplo:

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2 z,\ y^2 x,\ y + 2z)$$

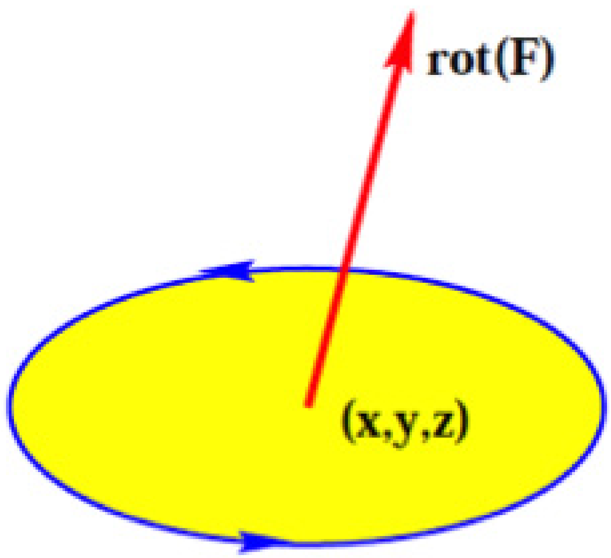
$$\text{rot}\ \boldsymbol{F}\ (x, y, z) = \nabla\ \mathbf{x}\ \boldsymbol{F}\ (x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 z & y^2 x & y + 2z \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial (y+2z)}{\partial y} - \frac{\partial (y^2 x)}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial (x^2 z)}{\partial z} - \frac{\partial (y+2z)}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial (y^2 x)}{\partial x} - \frac{\partial (x^2 z)}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

$$= \boldsymbol{i} + x^2 \boldsymbol{j} + y^2 \boldsymbol{k}$$

8. Interpretação do Rotacional

Seja F um campo de vetores que representa o campo de velocidade de um fluido e considere uma partícula situada no ponto (x,y,z). As partículas situadas na vizinhança deste ponto tendem a rodar ao redor do eixo formado pelo vetor rot(F). O comprimento deste vetor é a velocidade com que as partículas se movem ao redor deste eixo.



$\mathrm{Rot}(F(x,y,z))=0$

O fluido está livre de rotações na vizinhança do ponto considerado.

9. Laplaciano: ∇^2

O operador que resulta aplicando-se o operador del a si mesmo é denotado por ∇^2 e é chamado OPERADOR LAPLACIANO.

Esse operador tem a forma:

$$\nabla^2 = \nabla . \nabla =$$

Quando aplicado a *f*(*x*,*y*,*z*) produz a função:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

O Laplaciano também pode ser expresso como a divergência do gradiente da função *f*(*x*,*y*,*z*).

$$\text{Div } (\nabla f) = \nabla . \nabla f = \nabla^2 f$$